

Conjectures sur les tableaux de Young standards

Arthur Rodelet--Causse

LaBRI

Journées Combinatoires de Bordeaux

Tableaux de Young Standard

✓	5		
✓	2	4	
	1	3	6
	<	<	

Tableaux de Young Standard

✓	5		
✓	2	4	
	1	3	6
		<	<

Algorithme de Robinson-Schensted

Insertion d'une valeur dans un tableau :

13			
7			
2	9	10	
1	3	5	6

← 4

Tableaux de Young Standard

✓	5		
✓	2	4	
	1	3	6
	<	<	

Algorithme de Robinson-Schensted

Insertion d'une valeur dans un tableau :

13			
7			
2	9	10	
1	3	5	6

← 4

Tableaux de Young Standard

✓	5		
✓	2	4	
	1	3	6
	<	<	

Algorithme de Robinson-Schensted

Insertion d'une valeur dans un tableau :

13			
7			
2	9	10	
1	3	4	6

← 5

Tableaux de Young Standard

✓	5		
✓	2	4	
	1	3	6
	<	<	

Algorithme de Robinson-Schensted

Insertion d'une valeur dans un tableau :

13			
7			
2	5	10	
1	3	4	6

← 9

Tableaux de Young Standard

✓	5		
✓	2	4	
	1	3	6
		<	<

Algorithme de Robinson-Schensted

Insertion d'une valeur dans un tableau :

13			
7	9		
2	5	10	
1	3	4	6

Algorithme de Robinson-Schensted

L'algorithme associe un tableau de Young standard à une permutation :

524136

Algorithme de Robinson-Schensted

L'algorithme associe un tableau de Young standard à une permutation :

$$524136 \longrightarrow \boxed{5}$$

Algorithme de Robinson-Schensted

L'algorithme associe un tableau de Young standard à une permutation :

$$5\textcolor{red}{2}4136 \longrightarrow \boxed{5} \longrightarrow \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

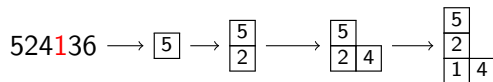
Algorithme de Robinson-Schensted

L'algorithme associe un tableau de Young standard à une permutation :

$$52\color{red}{4}136 \longrightarrow \boxed{5} \longrightarrow \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

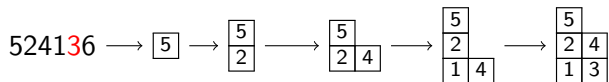
Algorithme de Robinson-Schensted

L'algorithme associe un tableau de Young standard à une permutation :



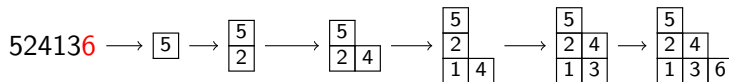
Algorithme de Robinson-Schensted

L'algorithme associe un tableau de Young standard à une permutation :



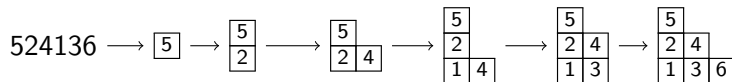
Algorithme de Robinson-Schensted

L'algorithme associe un tableau de Young standard à une permutation :



Algorithme de Robinson-Schensted

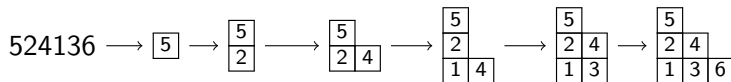
L'algorithme associe un tableau de Young standard à une permutation :



521436

Algorithme de Robinson-Schensted

L'algorithme associe un tableau de Young standard à une permutation :

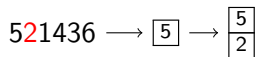
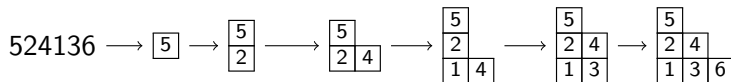


521436 $\longrightarrow$

5

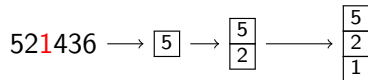
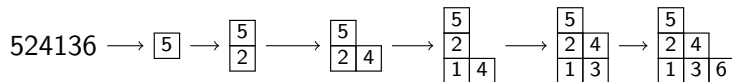
Algorithme de Robinson-Schensted

L'algorithme associe un tableau de Young standard à une permutation :



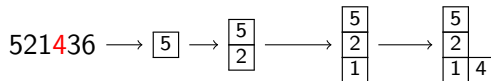
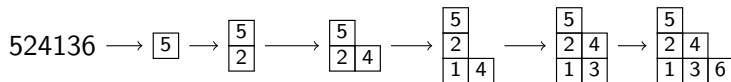
Algorithme de Robinson-Schensted

L'algorithme associe un tableau de Young standard à une permutation :



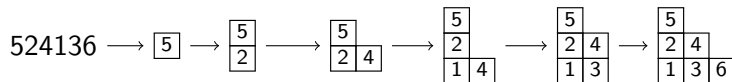
Algorithme de Robinson-Schensted

L'algorithme associe un tableau de Young standard à une permutation :



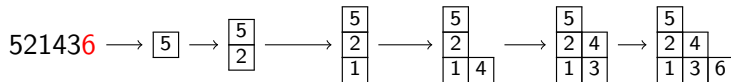
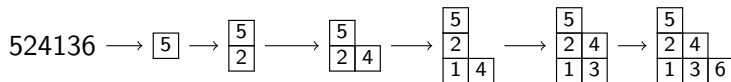
Algorithme de Robinson-Schensted

L'algorithme associe un tableau de Young standard à une permutation :



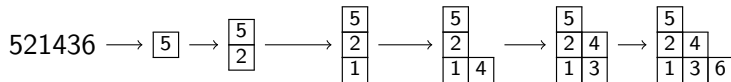
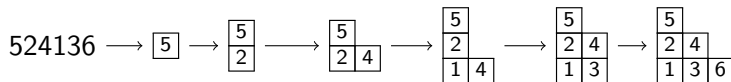
Algorithme de Robinson-Schensted

L'algorithme associe un tableau de Young standard à une permutation :



Algorithme de Robinson-Schensted

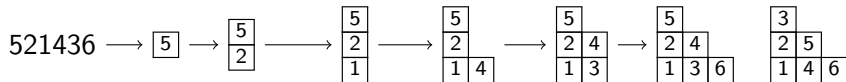
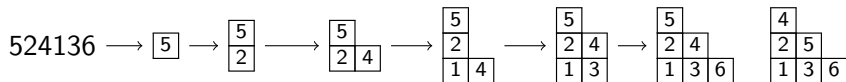
L'algorithme associe un tableau de Young standard à une permutation :



Algorithme surjectif mais non injectif.

Algorithme de Robinson-Schensted

L'algorithme associe un tableau de Young standard à une permutation :



Algorithme surjectif mais non injectif.

Ajout d'un deuxième tableau.

Proposition (Schensted - 1961)

La correspondance de Robinson-Schensted établit une bijection entre l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$ et l'ensemble des paires de tableaux de taille n de même forme. Le premier tableau est appelé **P-symbole** de la permutation et le second est appelé **Q-symbole**.

$$123 \leftrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad 132 \leftrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$213 \leftrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 2 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \quad 231 \leftrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 2 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$312 \leftrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \quad 321 \leftrightarrow \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

Relations plaxiques (Knuth)

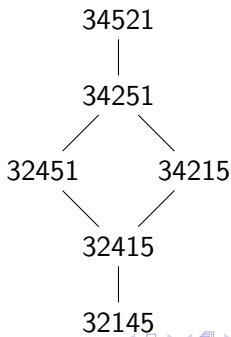
Deux permutations ont le même P-symbole si et seulement si on peut obtenir l'une à partir de l'autre par les règles de réécritures suivantes :

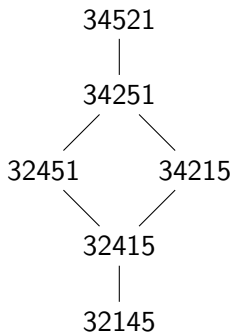
- $acb \equiv cab$, avec $a < b < c$
- $bac \equiv bca$, avec $a < b < c$

Exemple : $6\textcolor{red}{3}4\textcolor{red}{1}257 \equiv 6\textcolor{red}{3}1\textcolor{red}{4}257$

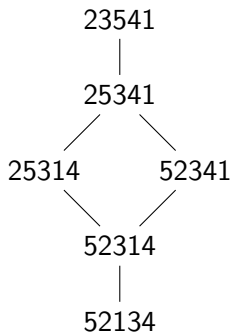
Graphe de réécriture plaxique :

3		
2		
1	4	5

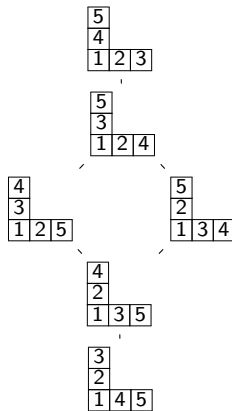




$$P = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & & \\ \hline 2 & & \\ \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline \end{array}$$



$$P = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & & \\ \hline 2 & & \\ \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$



Q-symboles.

Évacuation

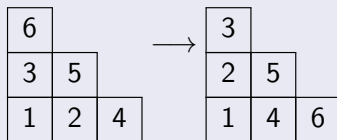
Involution de Schützenberger

Involution sur les permutations qui consiste à lire la permutation de droite à gauche en renversant les valeurs.

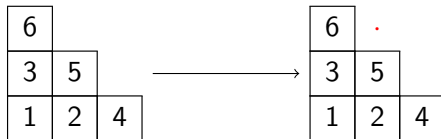
Exemple : $635124 \xrightarrow{\text{miroir}} 421536 \xrightarrow{\text{renversement}} 356241$

Évacuation

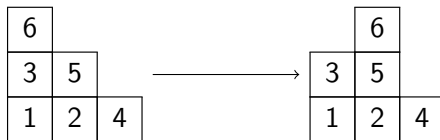
L'algorithme de Robinson-Schensted traduit cette involution sur les permutations en une involution sur les tableaux de Young standards de même forme appelée **évacuation**.



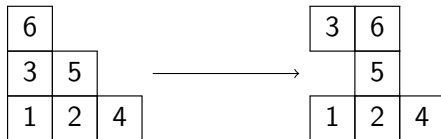
Jeu de taquin (dual)



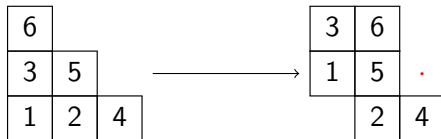
Jeu de taquin (dual)



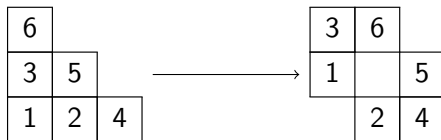
Jeu de taquin (dual)



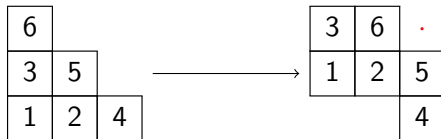
Jeu de taquin (dual)



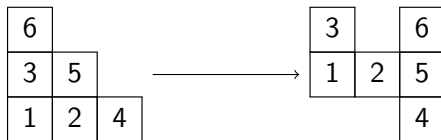
Jeu de taquin (dual)



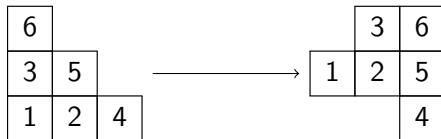
Jeu de taquin (dual)



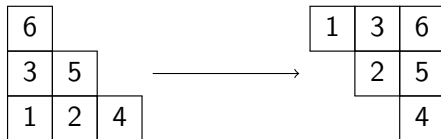
Jeu de taquin (dual)



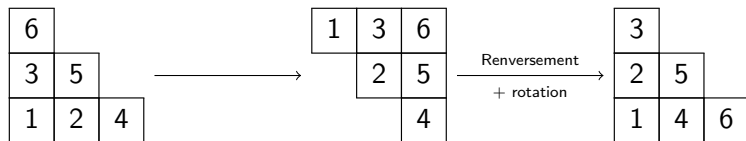
Jeu de taquin (dual)



Jeu de taquin (dual)



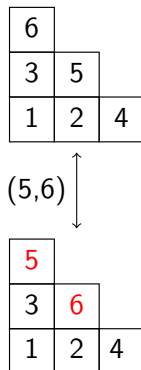
Jeu de taquin (dual)



Conjecture de Schützenberger

Conjecture (Schützenberger - 1976)

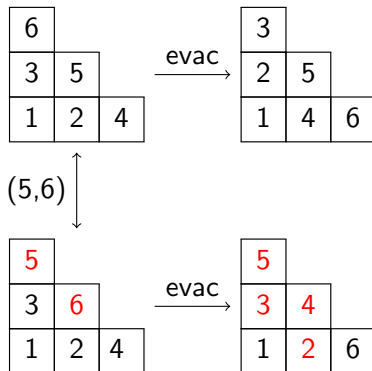
Soient T et T' deux tableaux standard qui diffèrent d'une transposition élémentaire. Alors les évacués de T et T' diffèrent d'un cycle de taille paire.



Conjecture de Schützenberger

Conjecture (Schützenberger - 1976)

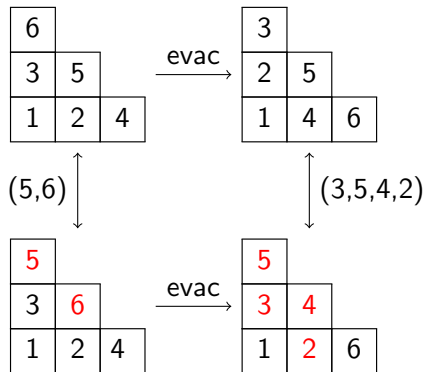
Soient T et T' deux tableaux standard qui diffèrent d'une transposition élémentaire. Alors les évacués de T et T' diffèrent d'un cycle de taille paire.



Conjecture de Schützenberger

Conjecture (Schützenberger - 1976)

Soient T et T' deux tableaux standard qui diffèrent d'une transposition élémentaire. Alors les évacués de T et T' diffèrent d'un cycle de taille paire.



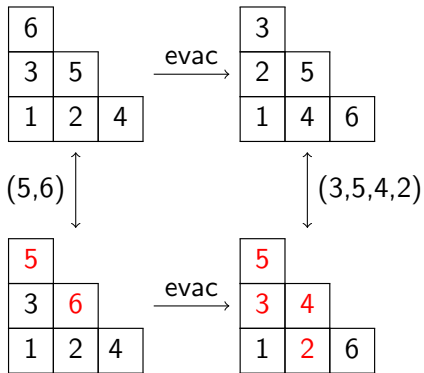
Cette conjecture a été démontrée dans plusieurs cas particuliers :

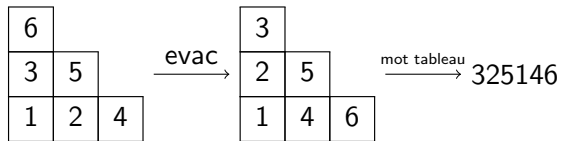
Théorème (Foata - 1976)

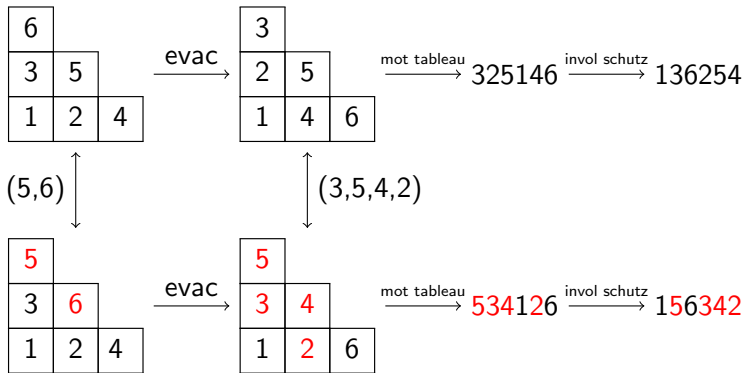
Cas de la transposition $(n - 1, n)$.

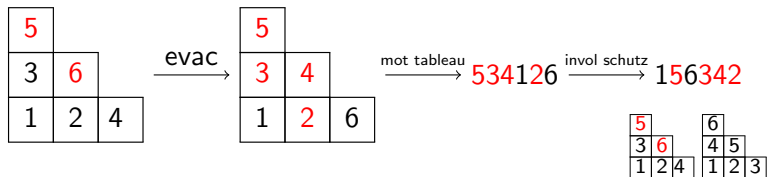
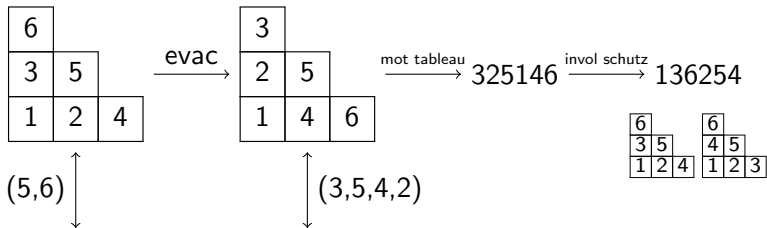
Théorème (Desgroseilliers, Larose, Malvenuto, Vincent - 2010)

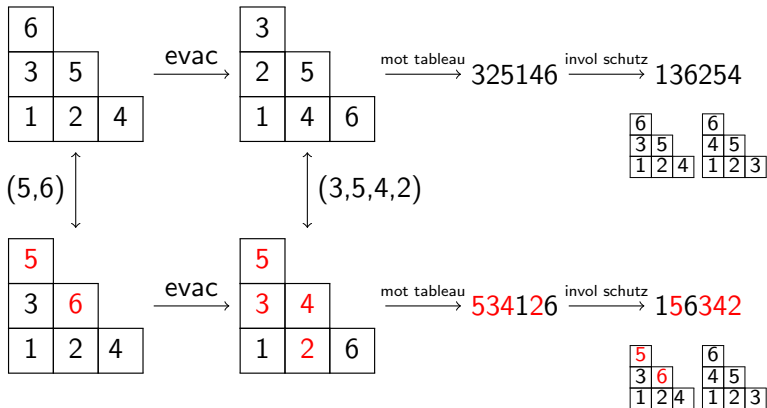
- Cas où T est un rectangle ou une équerre.
- Cas où la transposition est une réécriture coplaxique (voisins dans le graphe des Q-symboles).





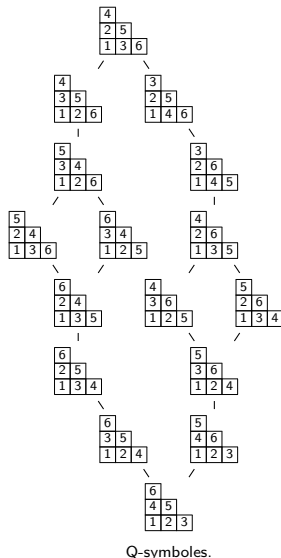
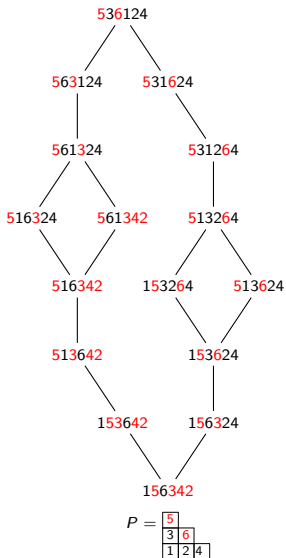
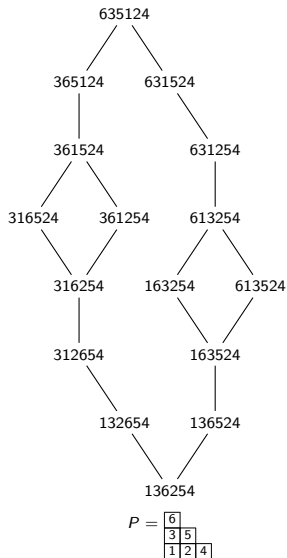






Reformulation de la conjecture

Soient T et T' deux tableaux standards qui diffèrent d'une transposition élémentaire. Alors, pour le Q -symbole remplissage par ligne, les permutations correspondant à (T, Q) et (T', Q) dans la correspondance de Robinson-Schensted diffèrent d'un cycle de taille paire.



Q-symbols.

Nouvelle conjecture

Conjecture (R--C.)

Soit T et T' deux tableaux qui diffèrent d'une transposition élémentaire et soit Q un tableau quelconque de même forme que T . Alors les permutations correspondant à (T, Q) et (T', Q) dans la correspondance de Robinson-Schensted diffèrent d'un cycle de taille paire.

Proposition (R--C.)

Cette conjecture généralise la précédente.

Proposition (R--C.)

Il suffit de démontrer cette conjecture pour la transposition $(n - 1, n)$.

Plaques

Définition

Soit $\sigma = a_1 \dots a_n$ une permutation de taille n et $i < n$. On dit que i est une descente de σ si $a_i > a_{i+1}$.

Exemple : 52134 a pour descentes 1 et 2.

Définition

Soient W une partie de S_n et σ une permutation de taille n . On dit que σ est admissible pour W si pour tout w dans W , σw et w ont les mêmes descentes.

Exemple : la transposition $(2, 3)$ est admissible pour $W = \{52134, 35421\}$ car

- 52134 et 53124 ont les mêmes descentes
- 35421 et 25431 ont les mêmes descentes

Théorème (Moszkowski, Schützenberger)

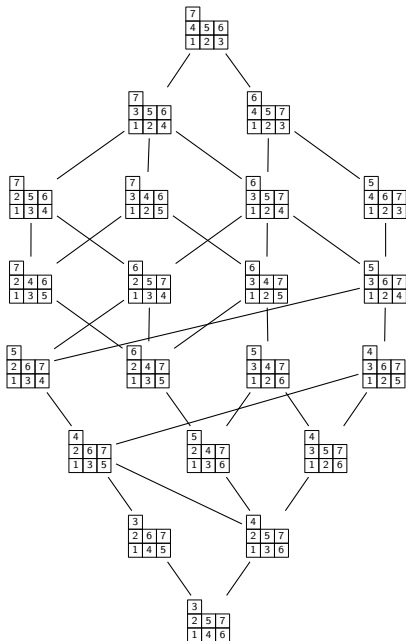
Si W est une classe plaxique alors σ est admissible pour W si et seulement si:

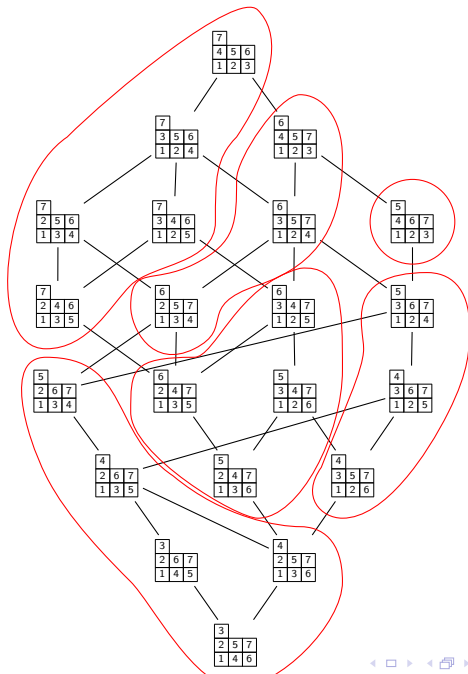
$$\forall w \in W, P(\sigma w) = \sigma P(w) \text{ et } Q(\sigma w) = Q(w).$$

Donc on a une notion de permutation admissible pour un tableau qui induit une relation d'équivalence.

Définition

$T \equiv \sigma T$ si σ est admissible pour T . On dit que T et σT sont dans la même plaque.





Théorème (Moszkowski, Schützenberger)

Les plaques sont des intervalles pour l'ordre faible gauche sur les tableaux.

Comment calculer la plaque d'un tableau ?

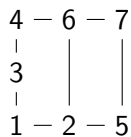
Diagrammes de Plaques

4		
3	6	7
1	2	5

4
|
3 - 6 - 7
| | |
1 - 2 - 5

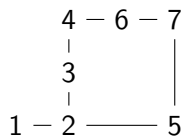
Diagrammes de Plaques

4	6	
3		7
1	2	5

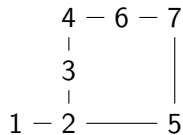
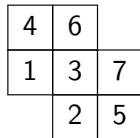


Diagrammes de Plaques

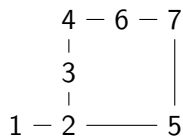
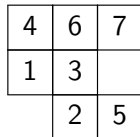
4	6	
	3	7
1	2	5



Diagrammes de Plaques

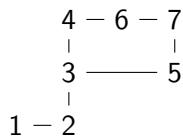


Diagrammes de Plaques



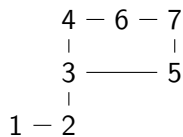
Diagrammes de Plaques

4	6	7
1	3	5
	2	

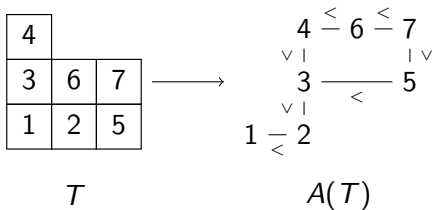


Diagrammes de Plaques

4	6	7
1	3	5
		2

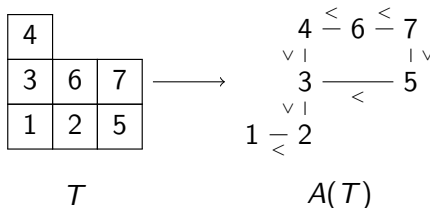


Diagrammes de Plaques



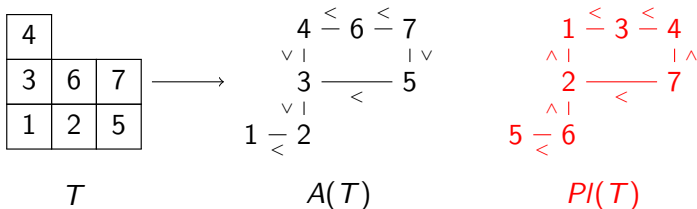
$A(T)$ caractérise les permutations admissibles de T .

Diagrammes de Plaques



$A(T)$ caractérise les permutations admissibles de T .
L'algorithme est non injectif.

Diagrammes de Plaques

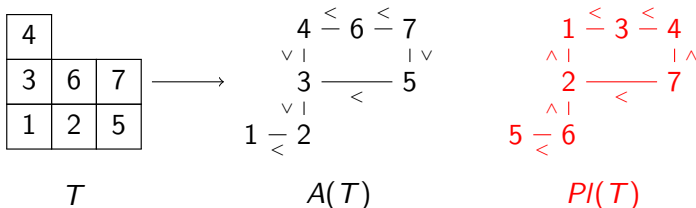


$A(T)$ caractérise les permutations admissibles de T .

L'algorithme est non injectif.

On compose par l'inverse de la lecture ligne de T .

Diagrammes de Plaques



$A(T)$ caractérise les permutations admissibles de T .

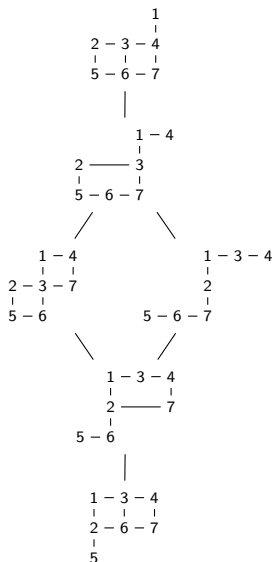
L'algorithme est non injectif.

On compose par l'inverse de la lecture ligne de T .

Proposition (R--C.)

L'application qui à chaque tableau T associe la paire de diagrammes $(PI(T), A(T))$ est injective et deux tableaux T et T' appartiennent à la même plaque si et seulement si $PI(T) = PI(T')$.

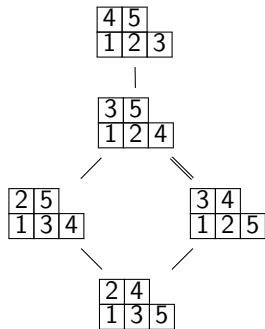
Ordre sur les plaques

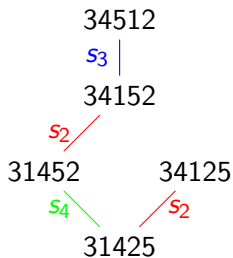
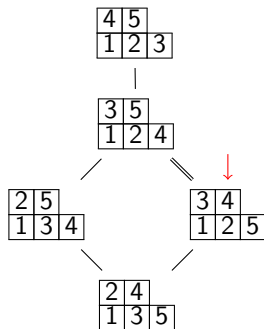


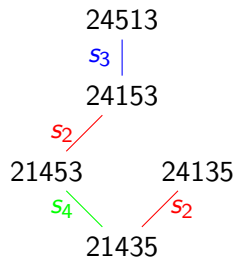
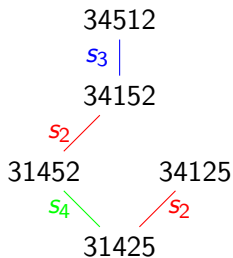
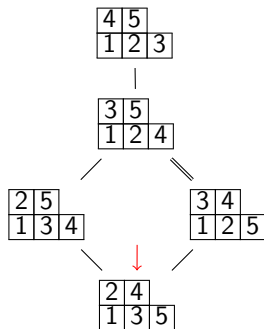
A partir de l'ordre sur les tableaux, on peut définir un ordre sur les plaques.

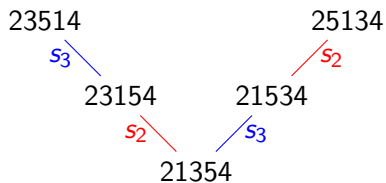
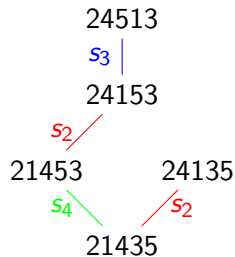
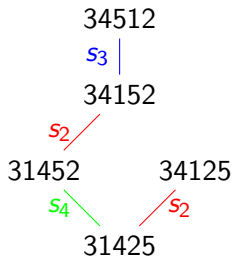
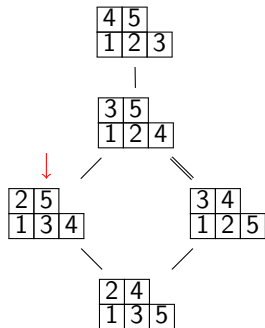
Proposition (R--C.)

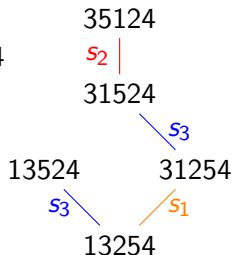
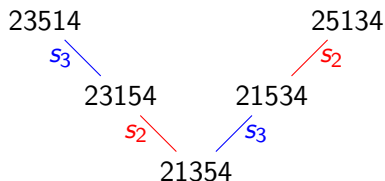
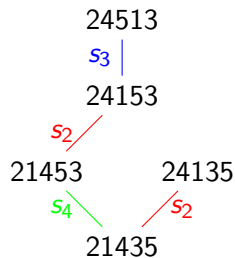
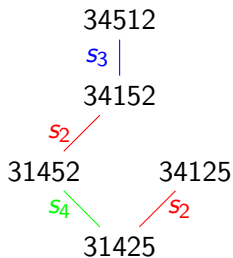
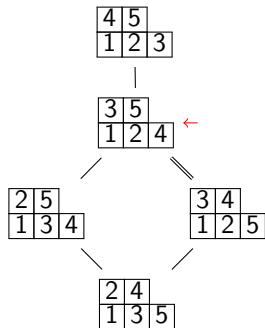
L'ordre sur les plaques possède un unique élément minimal et maximal et il est autodual.

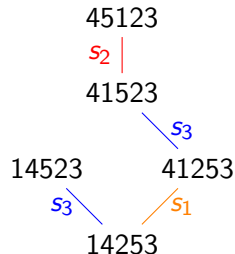
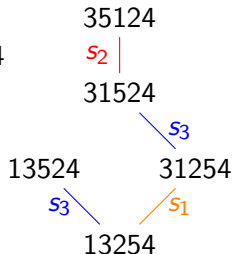
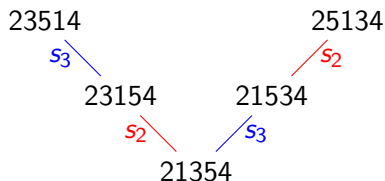
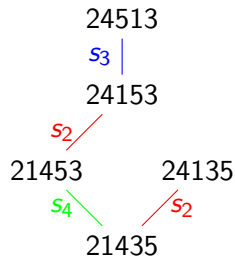
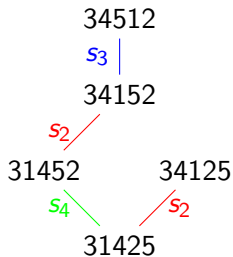
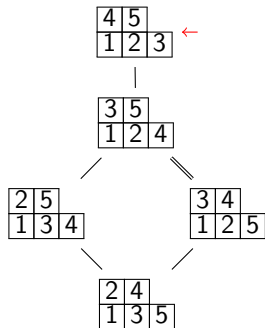


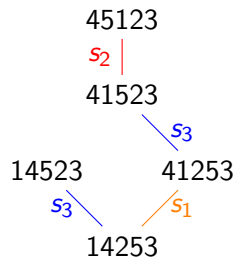
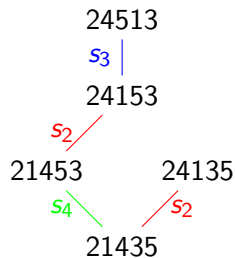
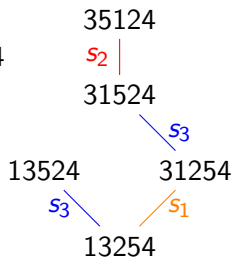
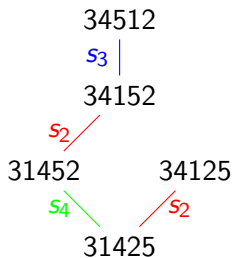
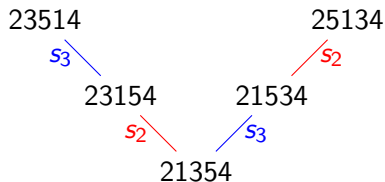
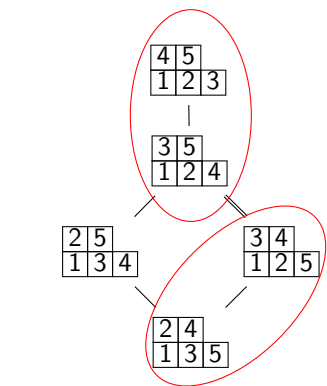












Proposition (R--C.)

Deux tableaux appartiennent à la même plaque si et seulement si leurs graphes plaxique orientés sont les mêmes.

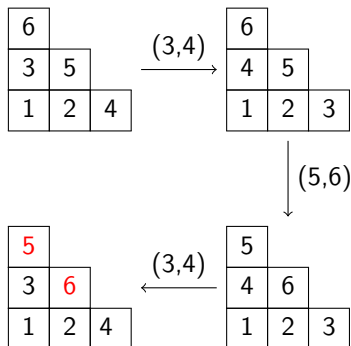
De cette proposition découle un algorithme qui permet de déterminer la permutation de différence entre les évacués de deux tableaux.

Description du cycle

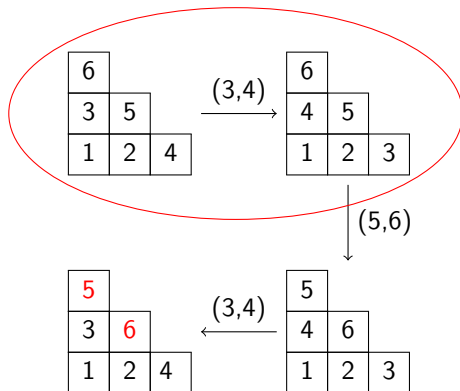
6		
3	5	
1	2	4

5		
3	6	
1	2	4

Description du cycle

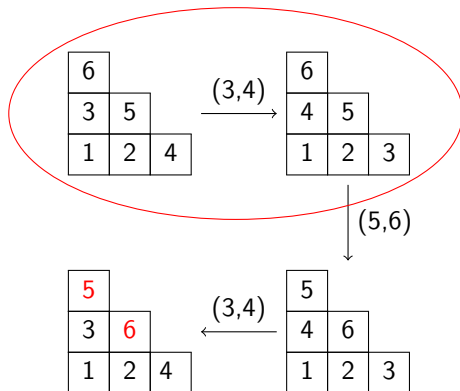


Description du cycle



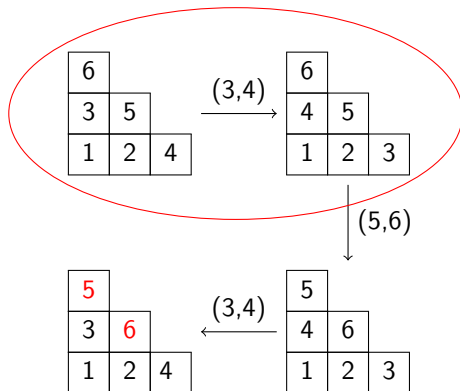
$(3,4)(5,6)(3,4)$

Description du cycle



$$(3,4)(5,6)(3,4) \longrightarrow (2,3)(4,5)(3,4)$$

Description du cycle



$$(3,4)(5,6)(3,4) \longrightarrow (2,3)(4,5)(3,4) \longrightarrow (3,5,4,2)$$

Pour la version générale de la conjecture, on a besoin d'une famille de classes d'équivalence qui généralise le plaques.

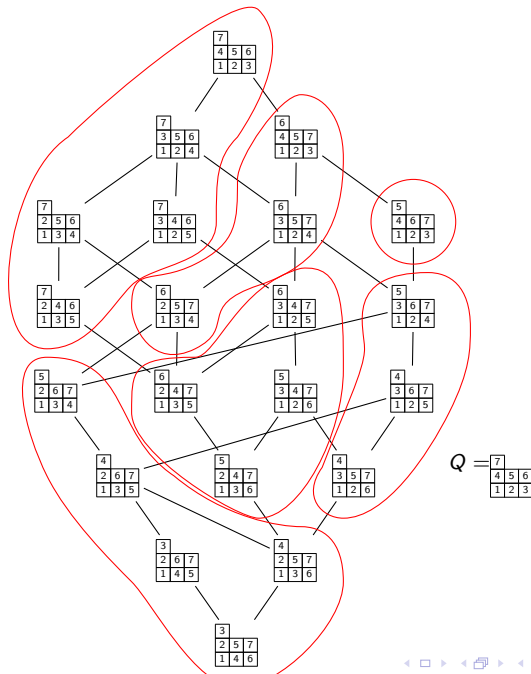
Théorème (R--C.)

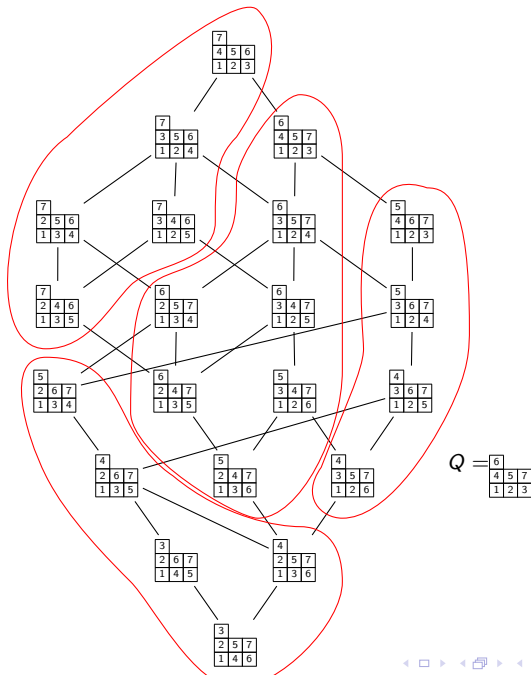
Soit W une classe plaxique et I un idéal de l'ordre sur les plaques de la forme de W . On note $W_I = \{w \in W \mid \text{Plaque}(Q(w)) \in I\}$. Alors σ est admissible pour W_I si et seulement si:

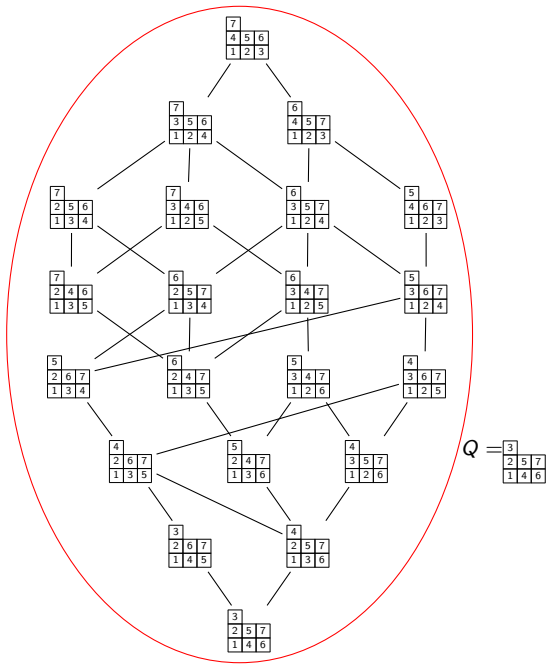
$$\forall w \in W_I, \quad P(\sigma w) = \sigma P(w) \quad \text{et} \quad Q(\sigma w) = Q(w).$$

Définition

$T \equiv_I \sigma T$ si σ est admissible pour W_I , où W est la classe de T . Les classes d'équivalence de cette relation sont appelées les surplaques induites par I .







Proposition (R--C.)

Les surplaques sont des intervalles pour l'ordre faible gauche sur les tableaux.

On peut appliquer le même algorithme que précédemment pour obtenir la permutation de différence entre les permutations correspondant à (T, Q) et (T', Q) par Robinson-Schensted.

Conjecture générale démontrée dans plusieurs cas:

Théorème (R--C.)

- Cas où T est un rectangle ou une équerre.
- Cas où la transposition est une réécriture coplaxique.
- Cas où le chemin coplaxique entre les deux tableaux est de longueur 3.
- Cas de certains types de chemins particuliers.

Conjecture

Soit λ une partition composée d'une part m de multiplicité 1 et une part r de multiplicité l . On note $s = m - r$. Alors le nombre de plaques de forme λ est donné par:

$$\prod_{i=1}^s \prod_{j=1}^r \prod_{k=1}^l \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}$$

Nombre total de plaques de taille n :

1, 2, 4, 9, 22, 56, 150, 420, 1217, 3642, 11210, 35448, 114808, ...