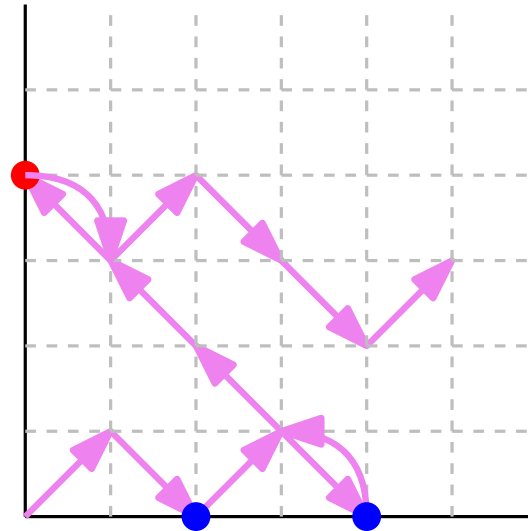


Classification des marches à bords interactifs dans le quart de plan : le genre 0

Pierre Bonnet



JCB 2025

Plan

I. Marches à bords interactifs et classification

II. Équations aux q -différences

III. Équations de découplage

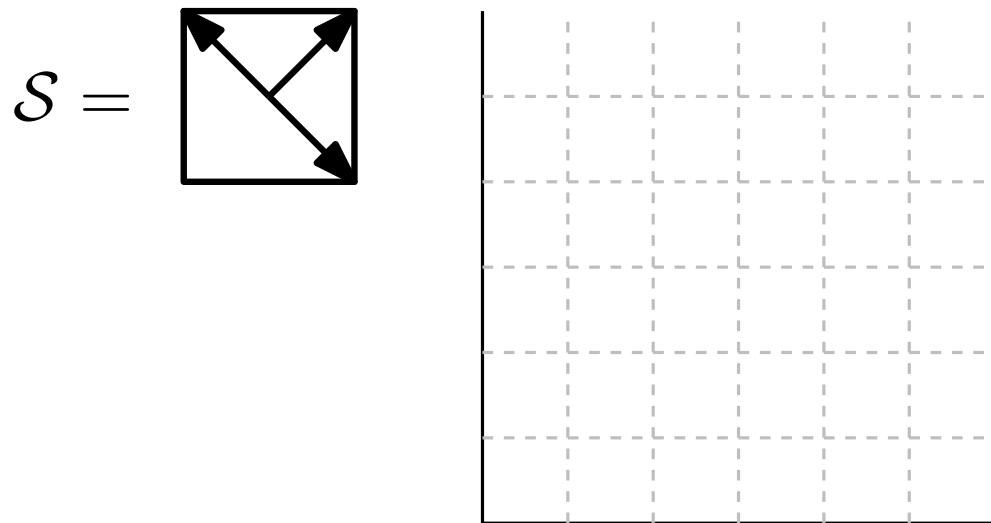
1. Marchés à bords interactifs

Marches dans le quart de plan

Étant donné un ensemble fini $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}$ (un **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** utilisant les pas du modèle.

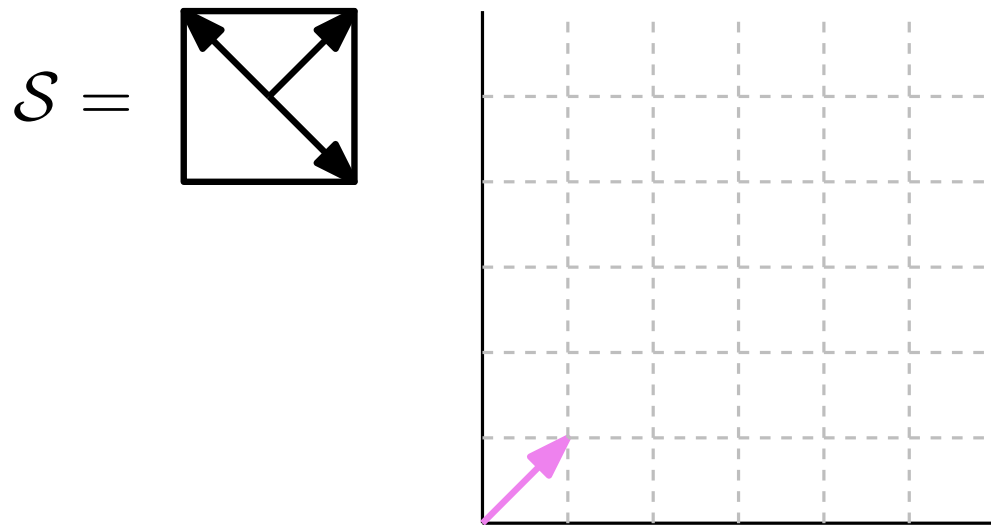
Marches dans le quart de plan

Étant donné un ensemble fini $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}$ (un **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** utilisant les pas du modèle.



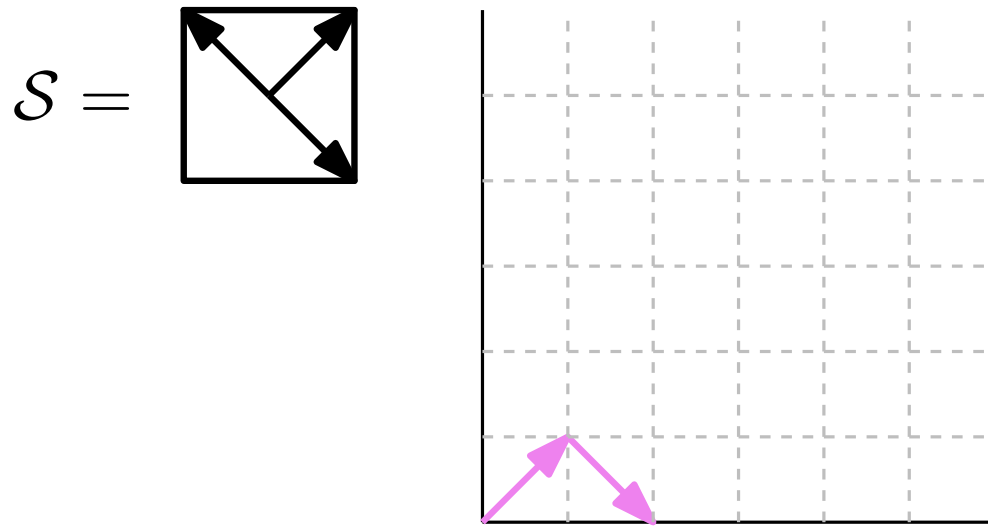
Marches dans le quart de plan

Étant donné un ensemble fini $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}$ (un **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** utilisant les pas du modèle.



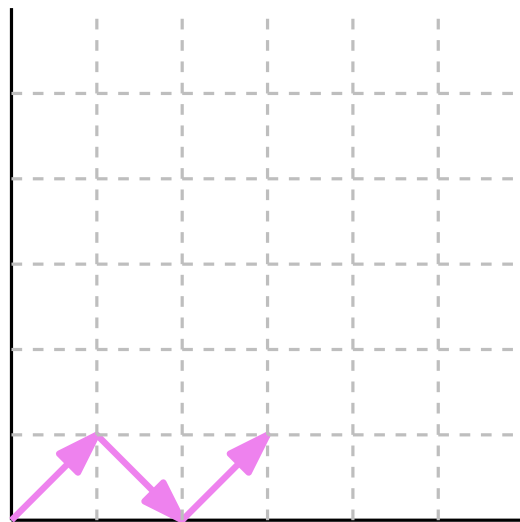
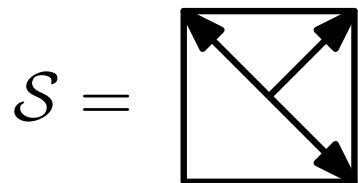
Marches dans le quart de plan

Étant donné un ensemble fini $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}$ (un **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** utilisant les pas du modèle.



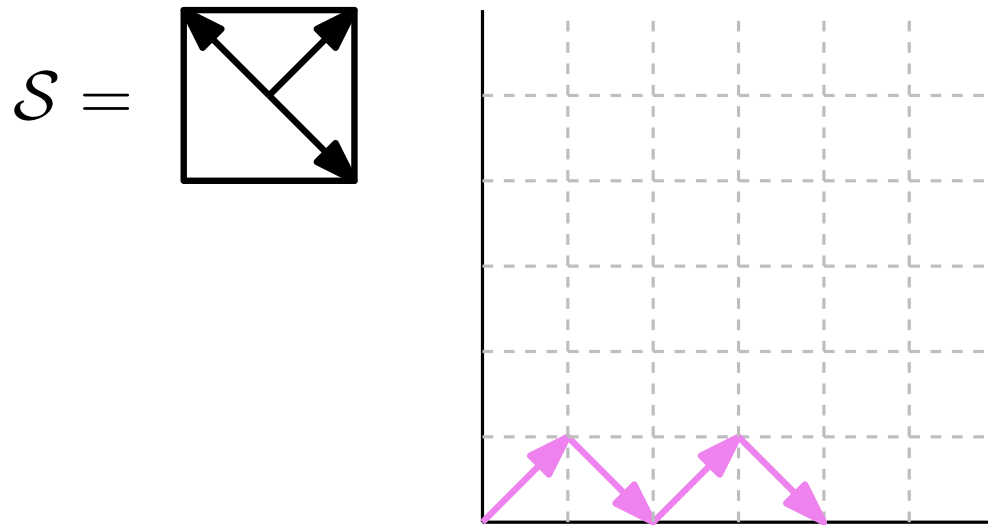
Marches dans le quart de plan

Étant donné un ensemble fini $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}$ (un **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** utilisant les pas du modèle.



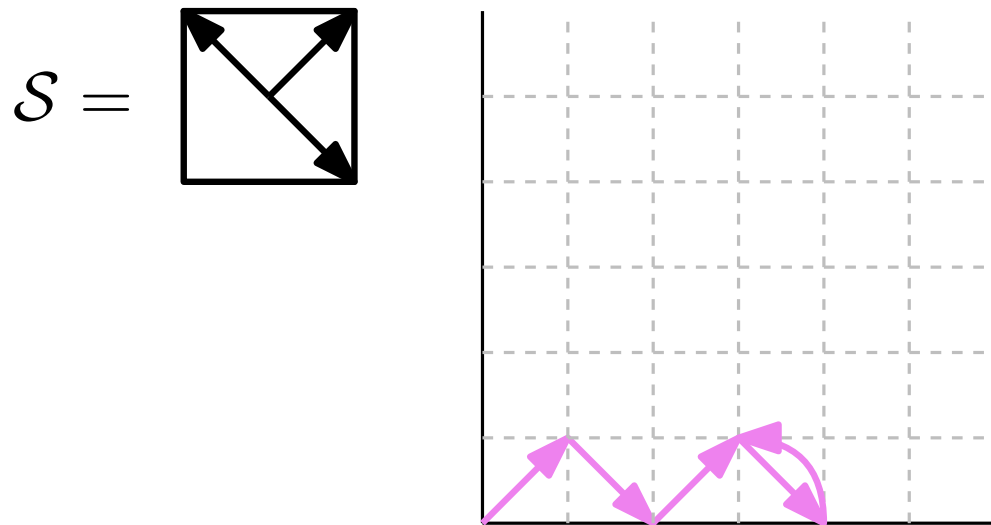
Marches dans le quart de plan

Étant donné un ensemble fini $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}$ (un **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** utilisant les pas du modèle.



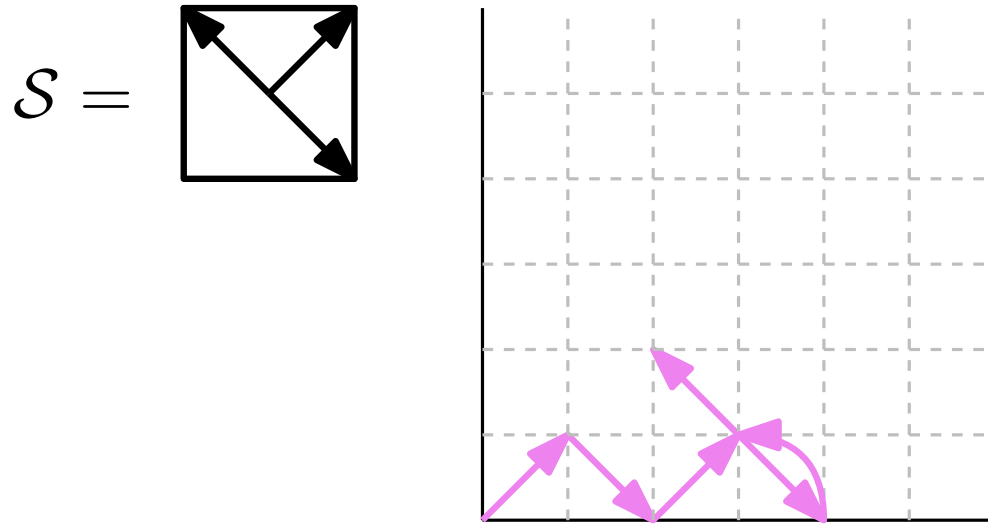
Marches dans le quart de plan

Étant donné un ensemble fini $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}$ (un **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** utilisant les pas du modèle.



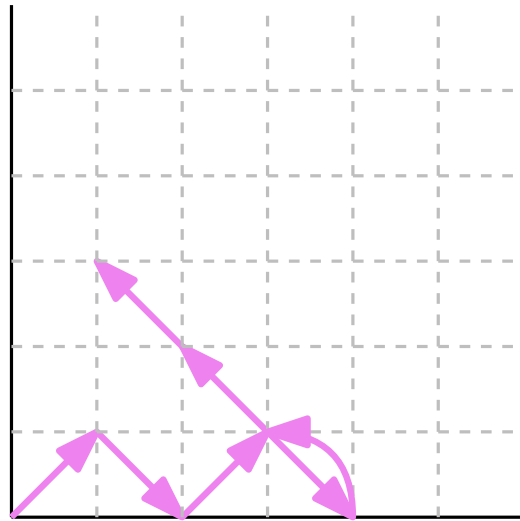
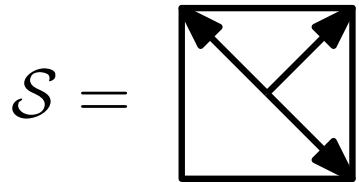
Marches dans le quart de plan

Étant donné un ensemble fini $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}$ (un **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** utilisant les pas du modèle.



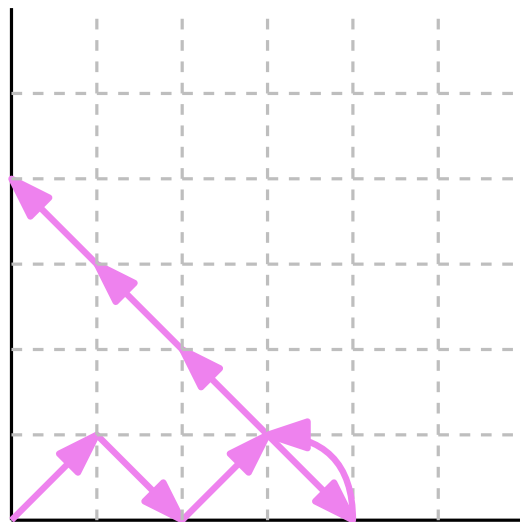
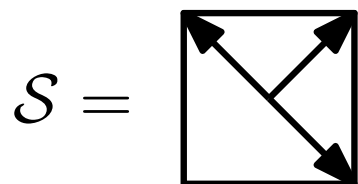
Marches dans le quart de plan

Étant donné un ensemble fini $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}$ (un **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** utilisant les pas du modèle.



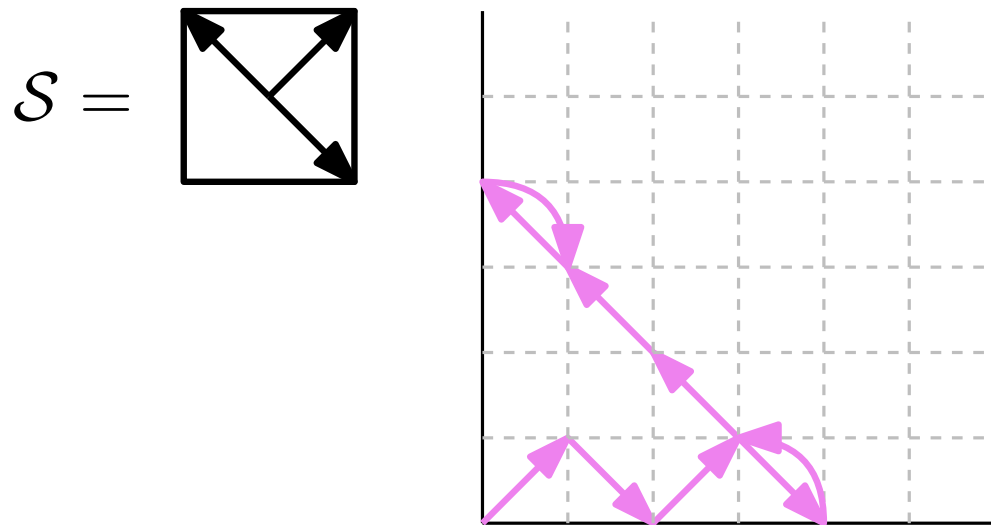
Marches dans le quart de plan

Étant donné un ensemble fini $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}$ (un **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** utilisant les pas du modèle.



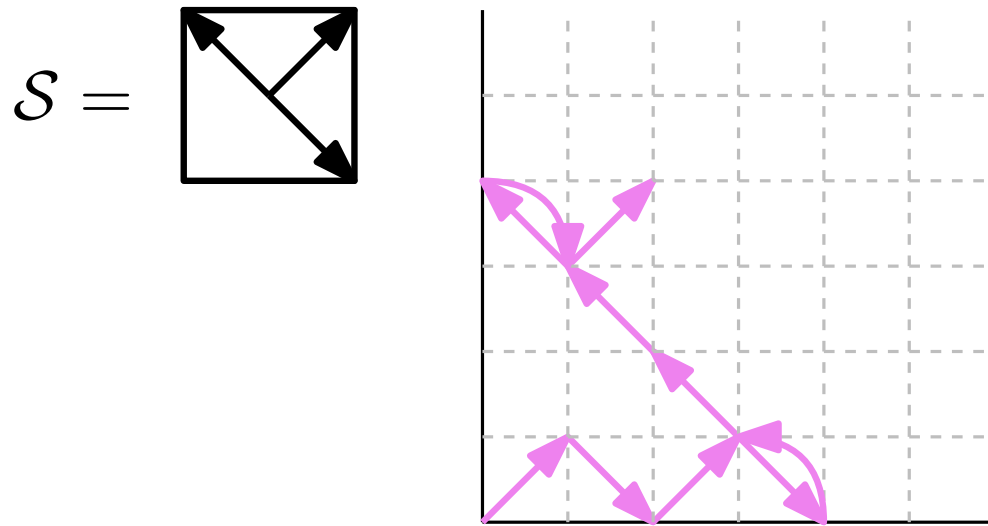
Marches dans le quart de plan

Étant donné un ensemble fini $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}$ (un **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** utilisant les pas du modèle.



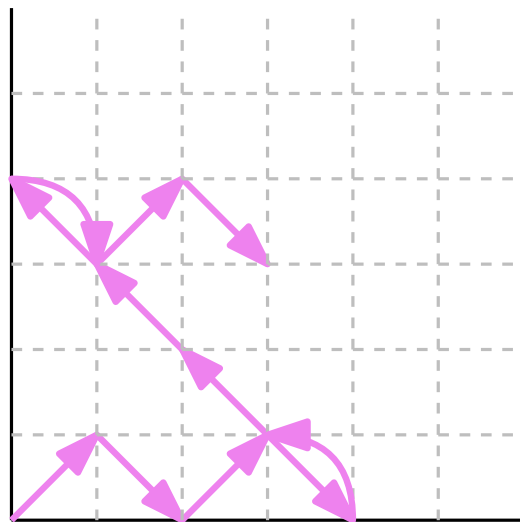
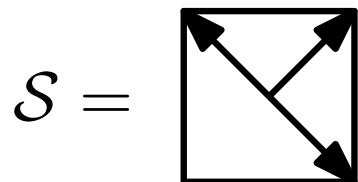
Marches dans le quart de plan

Étant donné un ensemble fini $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}$ (un **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** utilisant les pas du modèle.



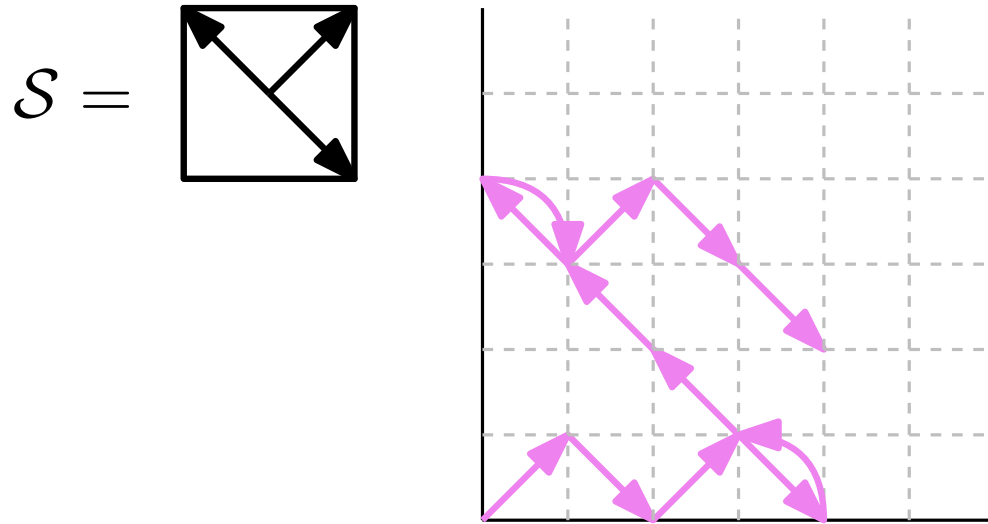
Marches dans le quart de plan

Étant donné un ensemble fini $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}$ (un **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** utilisant les pas du modèle.



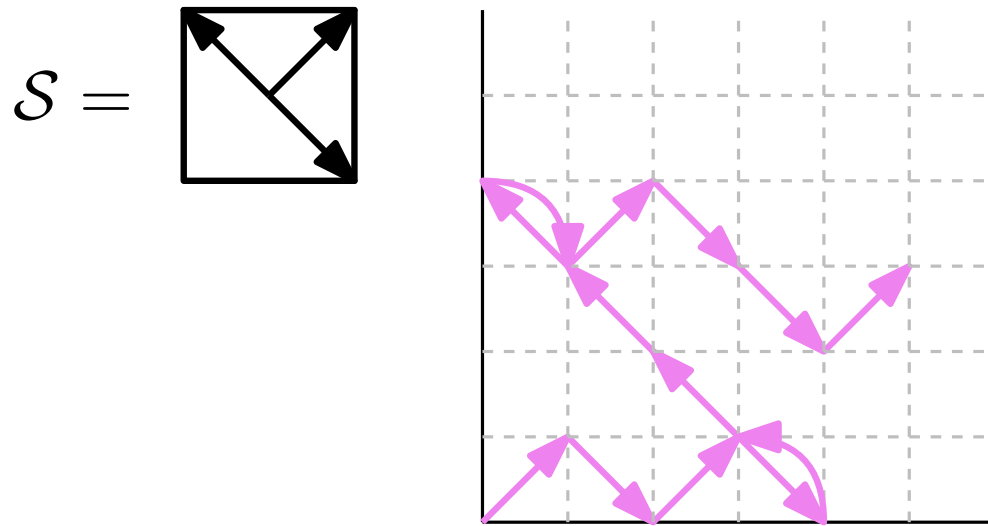
Marches dans le quart de plan

Étant donné un ensemble fini $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}$ (un **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** utilisant les pas du modèle.



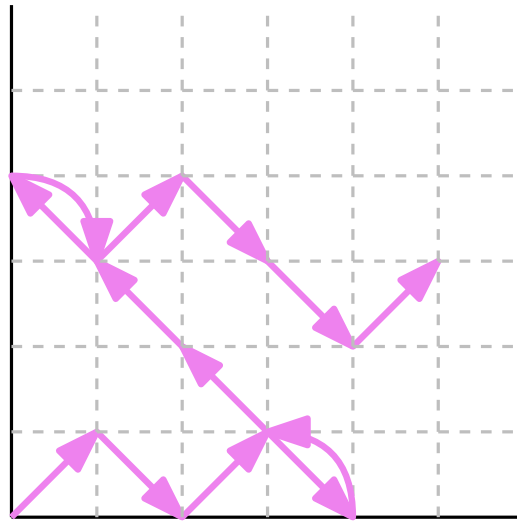
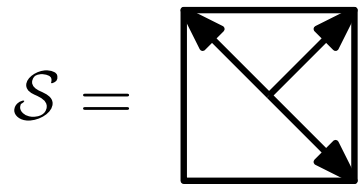
Marches dans le quart de plan

Étant donné un ensemble fini $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}$ (un **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** utilisant les pas du modèle.



Marches dans le quart de plan

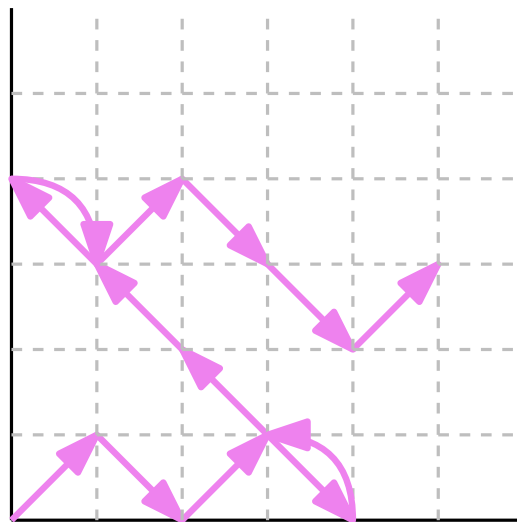
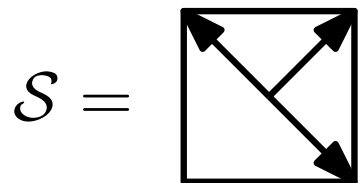
Étant donné un ensemble fini $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}$ (un **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** utilisant les pas du modèle.



Problème : énumérer ces marches, selon différentes statistiques :

Marches dans le quart de plan

Étant donné un ensemble fini $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}$ (un **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** utilisant les pas du modèle.



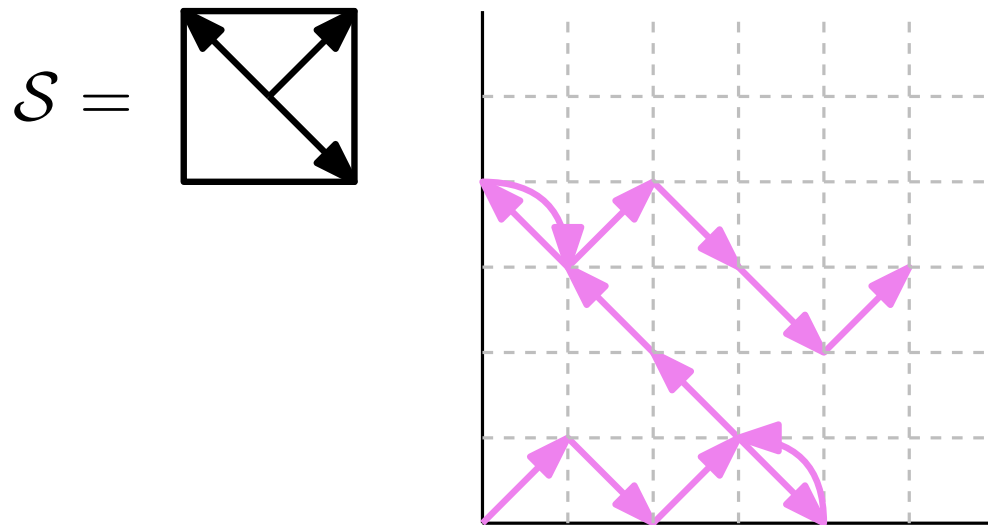
Problème : énumérer ces marches, selon différentes statistiques :

- nombre de pas utilisés n

$$n = 13$$

Marches dans le quart de plan

Étant donné un ensemble fini $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}$ (un **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** utilisant les pas du modèle.



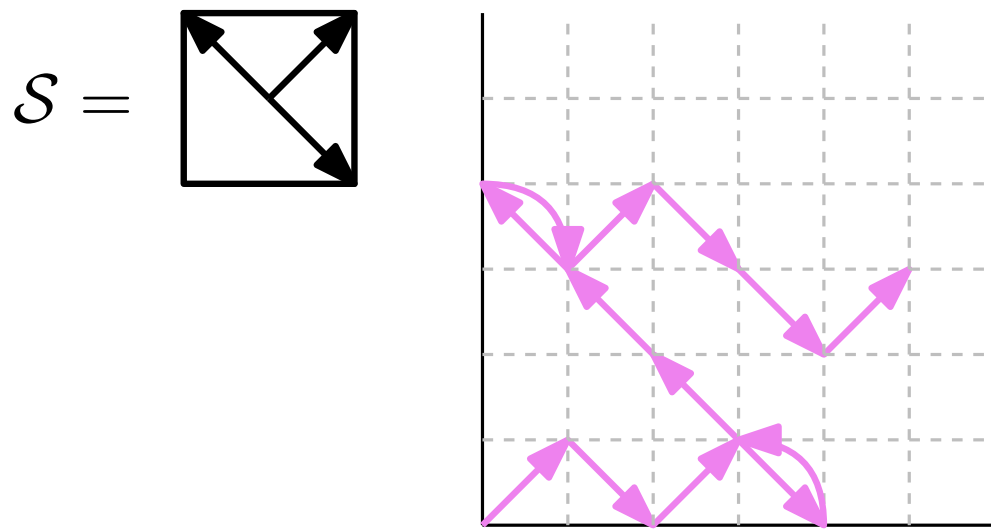
Problème : énumérer ces marches, selon différentes statistiques :

- nombre de pas utilisés n
- coordonnées finales (i, j)

$$n = 13 \quad (i, j) = (5, 3)$$

Marches dans le quart de plan

Étant donné un ensemble fini $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}$ (un **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** utilisant les pas du modèle.



Problème : énumérer ces marches, selon différentes statistiques :

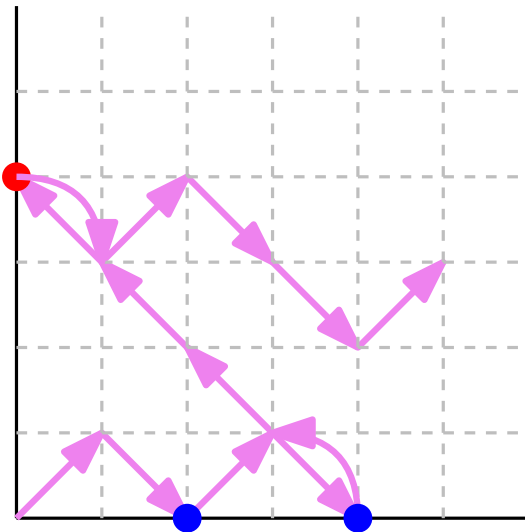
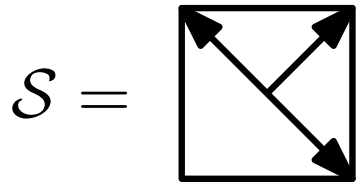
- nombre de pas utilisés n
- coordonnées finales (i, j)
- nombre d'occurrences n_p de chaque pas $p \in \mathcal{S}$

$$n = 13 \quad (i, j) = (5, 3)$$

$$n_{(1,1)} = 4, \quad n_{(-1,1)} = 4, \quad n_{(1,-1)} = 5$$

Marches dans le quart de plan à bords interactifs

Étant donné un ensemble fini $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}$ (un **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** utilisant les pas du modèle.



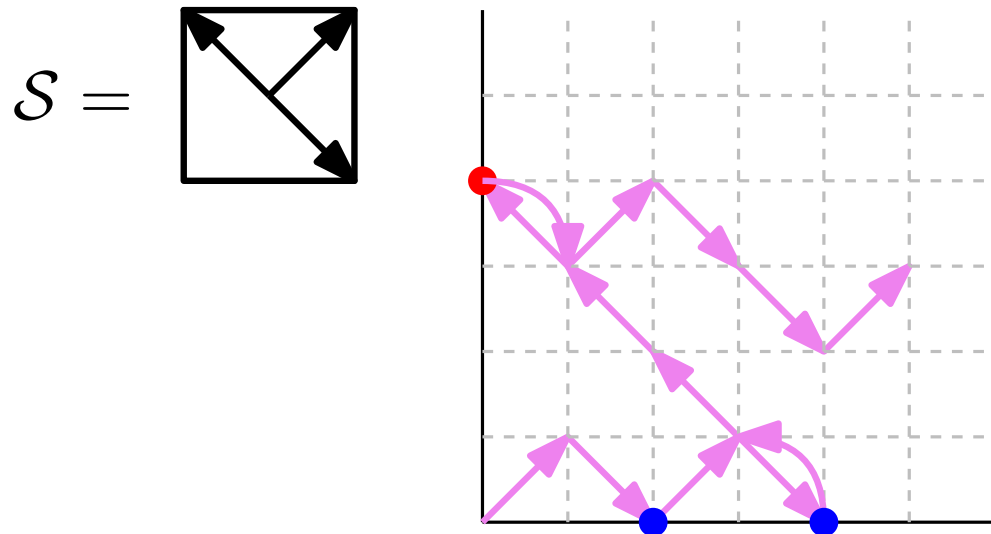
$$\begin{aligned}n &= 13 & (i, j) &= (5, 3) \\n_{(1,1)} &= 4, & n_{(-1,1)} &= 4, & n_{(1,-1)} &= 5 \\n_x &= 2, & n_y &= 1\end{aligned}$$

Problème : énumérer ces marches, selon différentes statistiques :

- nombre de pas utilisés n
- coordonnées finales (i, j)
- nombre d'occurrences n_p de chaque pas $p \in \mathcal{S}$
- nombre de contacts avec chacun des axes

Marches dans le quart de plan à bords interactifs

Étant donné un ensemble fini $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}$ (un **modèle**), on considère les **marches dans le quart de plan** utilisant les pas du modèle.



$$\begin{aligned}n &= 13 \quad (i, j) = (5, 3) \\n_{(1,1)} &= 4, \quad n_{(-1,1)} = 4, \quad n_{(1,-1)} = 5 \\n_x &= 2, \quad n_y = 1\end{aligned}$$

Problème : énumérer ces marches, selon différentes statistiques :

- nombre de pas utilisés n
- coordonnées finales (i, j)
- nombre d'occurrences n_p de chaque pas $p \in \mathcal{S}$
- nombre de contacts avec chacun des axes

Série génératrice: $Q(x, y) = \sum_{\text{marches}} \left(\prod_{p \in \mathcal{S}} d_p^{n_p} \right) a^{n_x} b^{n_y} x^i y^j t^n \in \mathbb{Q}[d_p, a, b, x, y][[t]]$

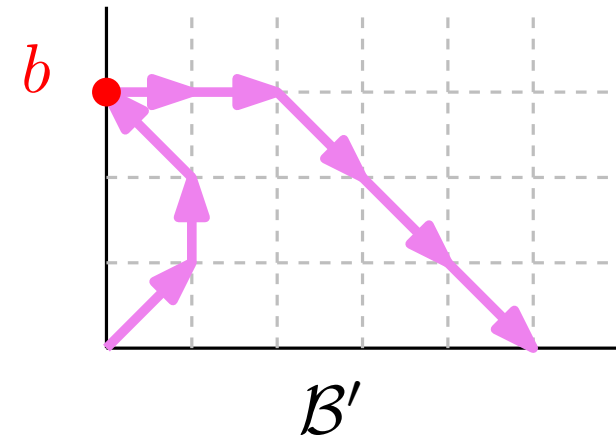
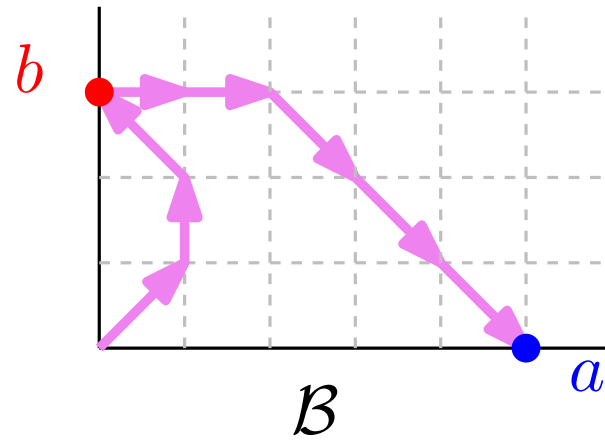
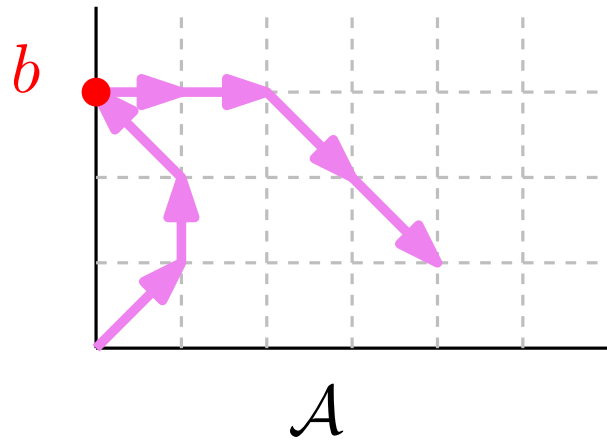
Équation fonctionnelle [Beaton, Owczarek, Rechnitzer, 2019]

$$Q(x, y) = \sum_{\text{marches}} \left(\prod_{p \in \mathcal{S}} d_p^{n_p} \right) a^{n_x} b^{n_y} x^i y^j t^n \qquad S(x, y) = \sum_{(k,l) \in \mathcal{S}} d_{k,l} x^k y^l$$

Équation fonctionnelle [Beaton, Owczarek, Rechnitzer, 2019]

$$Q(x, y) = \sum_{\text{marches}} \left(\prod_{p \in \mathcal{S}} d_p^{n_p} \right) a^{n_x} b^{n_y} x^i y^j t^n$$

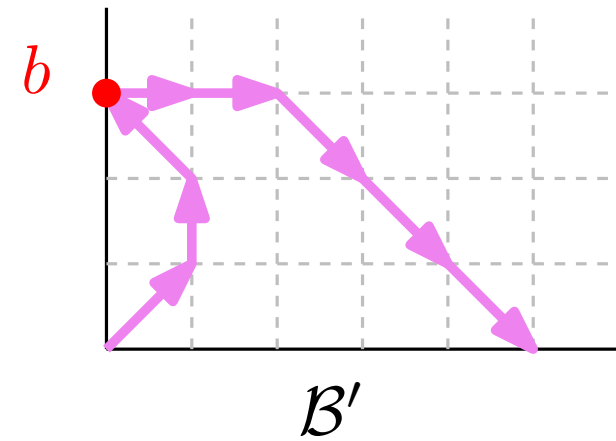
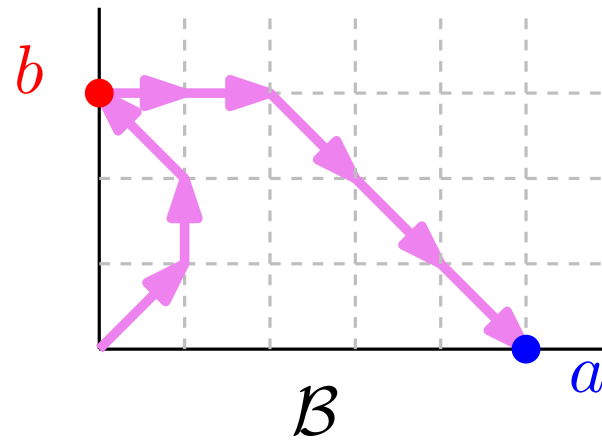
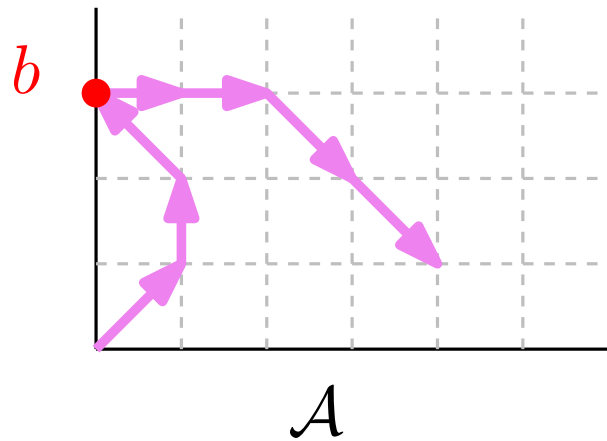
$$S(x, y) = \sum_{(k,l) \in \mathcal{S}} d_{k,l} x^k y^l$$



Équation fonctionnelle [Beaton, Owczarek, Rechnitzer, 2019]

$$Q(x, y) = \sum_{\text{marches}} \left(\prod_{p \in \mathcal{S}} d_p^{n_p} \right) a^{n_x} b^{n_y} x^i y^j t^n$$

$$S(x, y) = \sum_{(k,l) \in \mathcal{S}} d_{k,l} x^k y^l$$

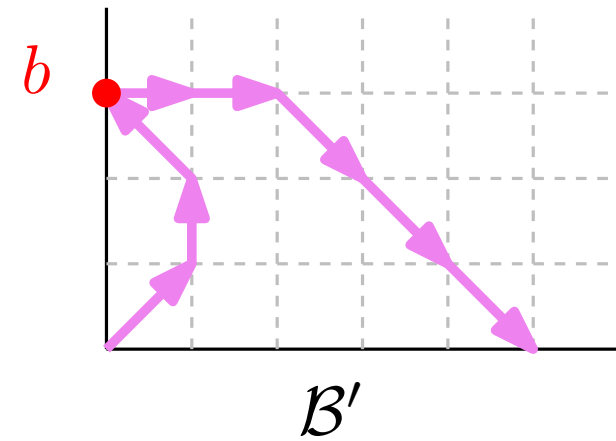
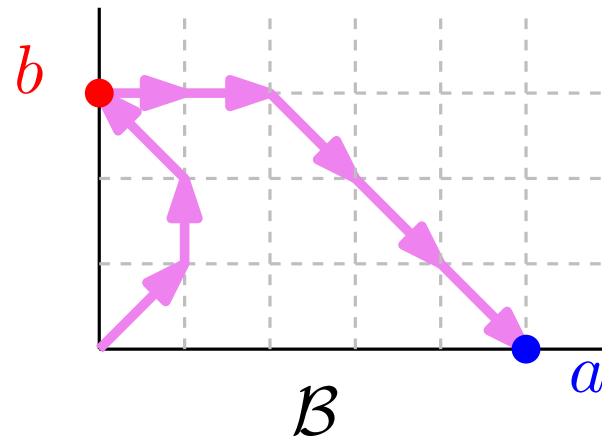
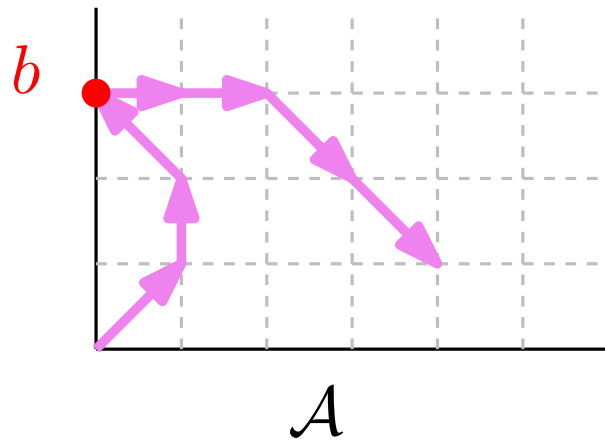


$$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{B}' = (\mathcal{A} + \mathcal{B}') + \mathcal{B}$$

Équation fonctionnelle [Beaton, Owczarek, Rechnitzer, 2019]

$$Q(x, y) = \sum_{\text{marches}} \left(\prod_{p \in \mathcal{S}} d_p^{n_p} \right) a^{n_x} b^{n_y} x^i y^j t^n$$

$$S(x, y) = \sum_{(k,l) \in \mathcal{S}} d_{k,l} x^k y^l$$

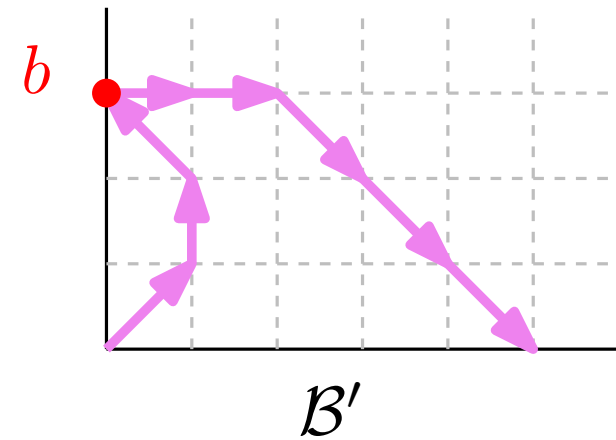
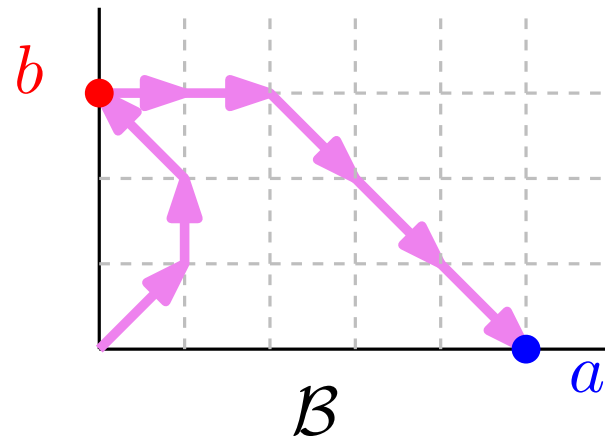
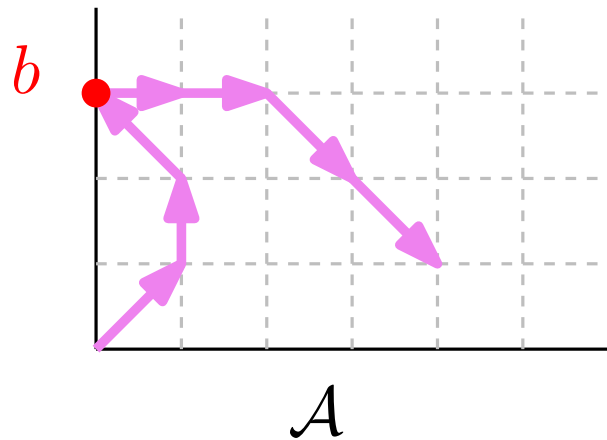


$$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{B}' = (\mathcal{A} + \mathcal{B}') + \mathcal{B}$$

Équation fonctionnelle [Beaton, Owczarek, Rechnitzer, 2019]

$$Q(x, y) = \sum_{\text{marches}} \left(\prod_{p \in \mathcal{S}} d_p^{n_p} \right) a^{n_x} b^{n_y} x^i y^j t^n$$

$$S(x, y) = \sum_{(k,l) \in \mathcal{S}} d_{k,l} x^k y^l$$



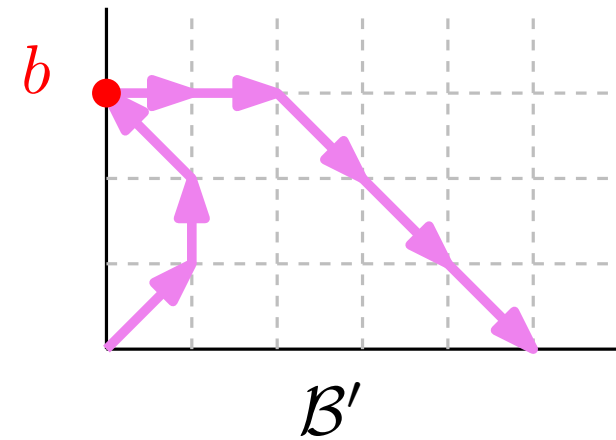
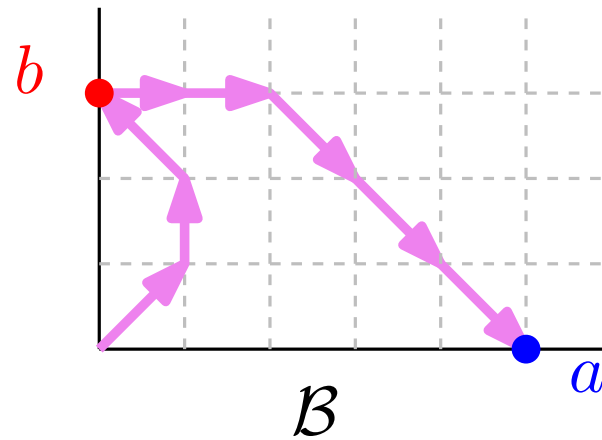
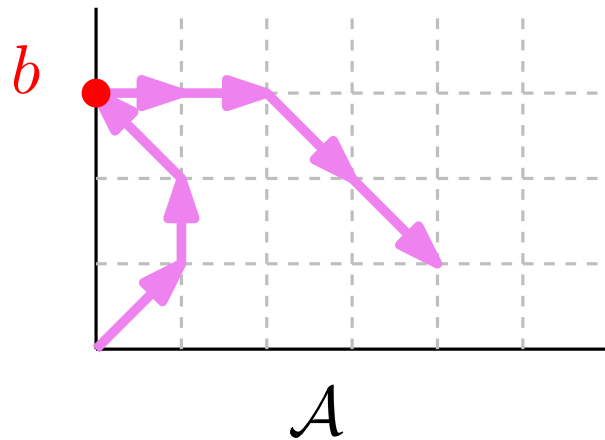
$$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{B}' = (\mathcal{A} + \mathcal{B}') + \mathcal{B}$$

$$\boxed{A(x, y) + B(x, y) = Q(x, y)}$$

Équation fonctionnelle [Beaton, Owczarek, Rechnitzer, 2019]

$$Q(x, y) = \sum_{\text{marches}} \left(\prod_{p \in \mathcal{S}} d_p^{n_p} \right) a^{n_x} b^{n_y} x^i y^j t^n$$

$$S(x, y) = \sum_{(k,l) \in \mathcal{S}} d_{k,l} x^k y^l$$



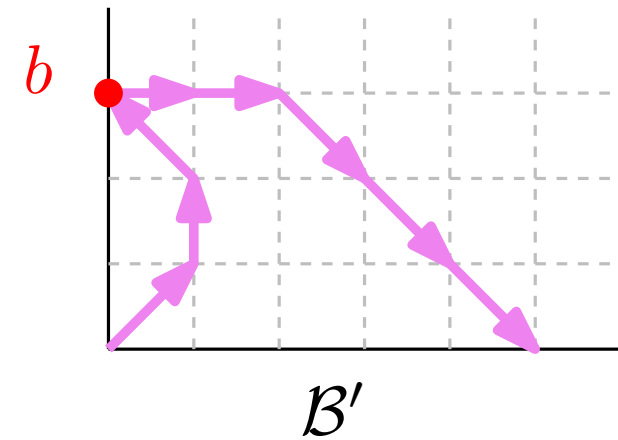
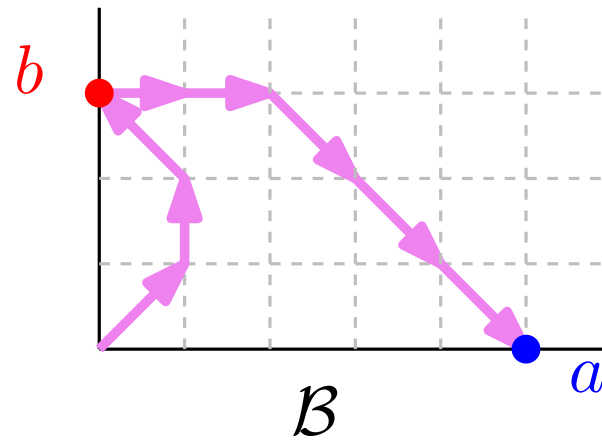
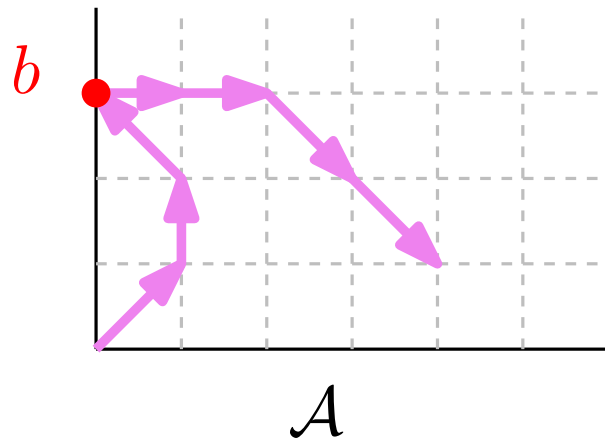
$$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{B}' = (\mathcal{A} + \mathcal{B}') + \mathcal{B}$$

$$A(x, y) + B(x, y) = Q(x, y)$$

Équation fonctionnelle [Beaton, Owczarek, Rechnitzer, 2019]

$$Q(x, y) = \sum_{\text{marches}} \left(\prod_{p \in \mathcal{S}} d_p^{n_p} \right) a^{n_x} b^{n_y} x^i y^j t^n$$

$$S(x, y) = \sum_{(k,l) \in \mathcal{S}} d_{k,l} x^k y^l$$



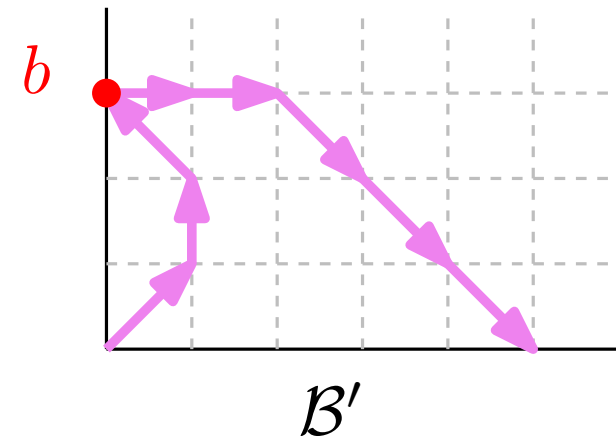
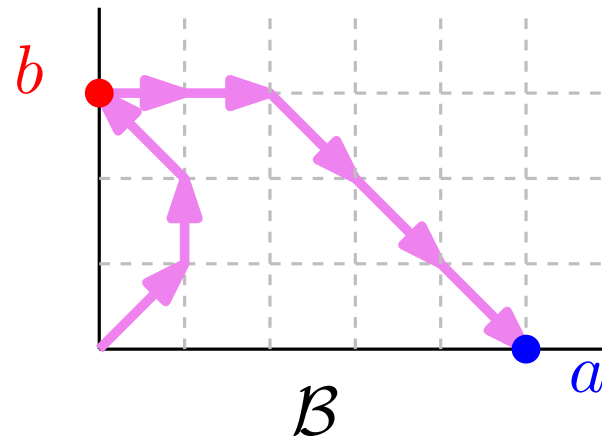
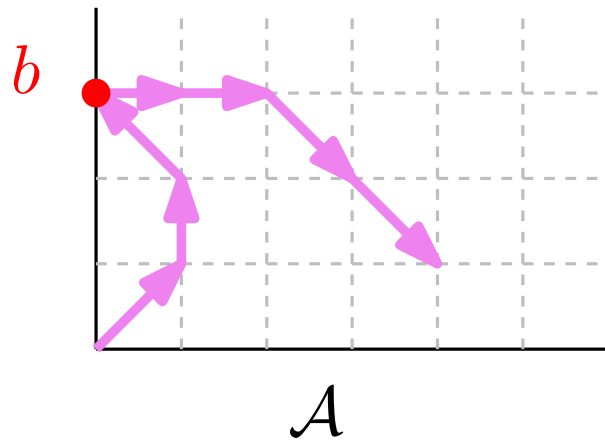
$$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{B}' = (\mathcal{A} + \mathcal{B}') + \mathcal{B}$$

$$A(x, y) + B(x, y) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \boxed{B(x, y) = Q_{j=0}(x, y) + Q_{i=0}(x, y) - Q_{i=j=0}(x, y)}$$

Équation fonctionnelle [Beaton, Owczarek, Rechnitzer, 2019]

$$Q(x, y) = \sum_{\text{marches}} \left(\prod_{p \in \mathcal{S}} d_p^{n_p} \right) a^{n_x} b^{n_y} x^i y^j t^n$$

$$S(x, y) = \sum_{(k,l) \in \mathcal{S}} d_{k,l} x^k y^l$$



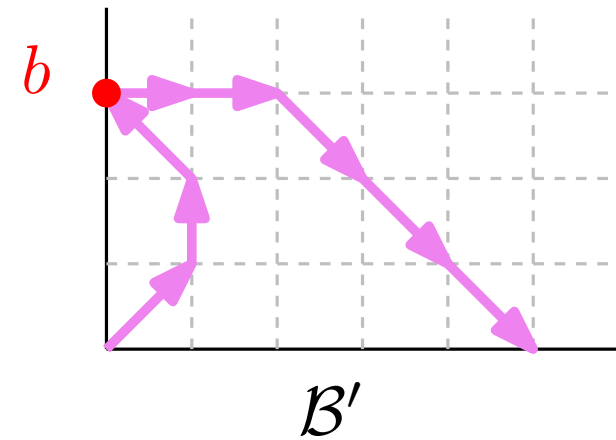
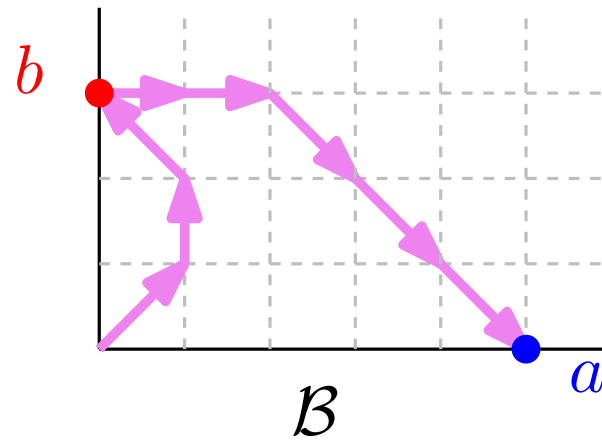
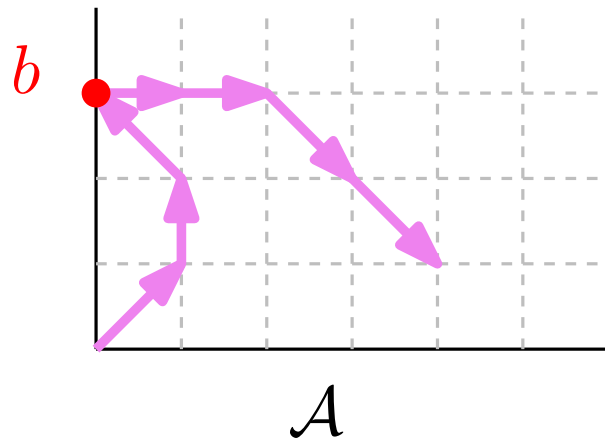
$$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{B}' = (\mathcal{A} + \mathcal{B}') + \mathcal{B}$$

$$A(x, y) + B(x, y) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad B(x, y) = Q_{j=0}(x, y) + Q_{i=0}(x, y) - Q_{i=j=0}(x, y)$$

Équation fonctionnelle [Beaton, Owczarek, Rechnitzer, 2019]

$$Q(x, y) = \sum_{\text{marches}} \left(\prod_{p \in \mathcal{S}} d_p^{n_p} \right) a^{n_x} b^{n_y} x^i y^j t^n$$

$$S(x, y) = \sum_{(k,l) \in \mathcal{S}} d_{k,l} x^k y^l$$



$$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{B}' = (\mathcal{A} + \mathcal{B}') + \mathcal{B}$$

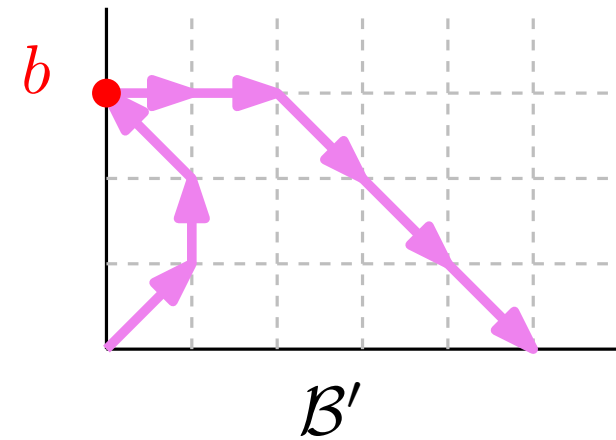
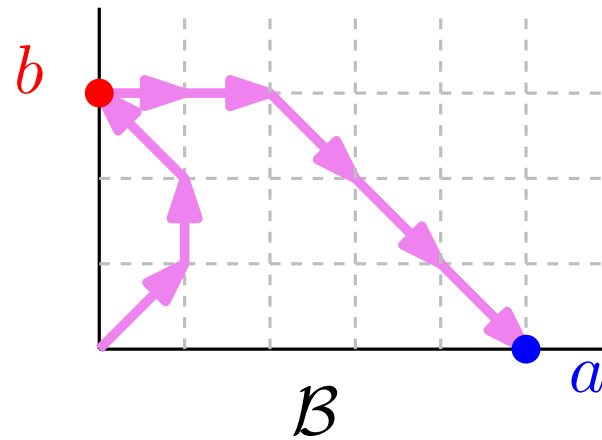
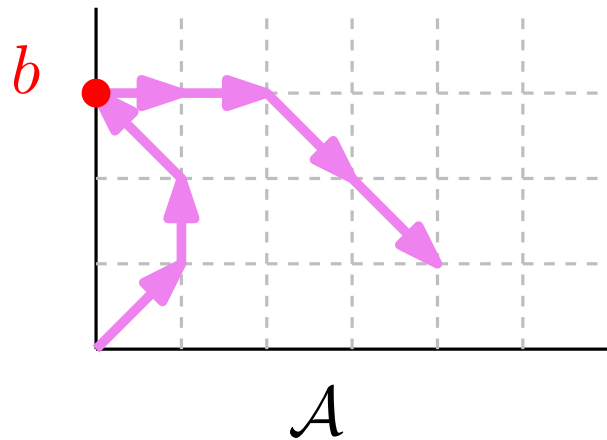
$$A(x, y) + B(x, y) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad B(x, y) = Q_{j=0}(x, y) + Q_{i=0}(x, y) - Q_{i=j=0}(x, y)$$

$$\boxed{B'(x, y) = \frac{1}{a} Q_{j=0}(x, y) + \frac{1}{b} Q_{i=0}(x, y) - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{ab} \right) Q_{i=j=0}(x, y)}$$

Équation fonctionnelle [Beaton, Owczarek, Rechnitzer, 2019]

$$Q(x, y) = \sum_{\text{marches}} \left(\prod_{p \in \mathcal{S}} d_p^{n_p} \right) a^{n_x} b^{n_y} x^i y^j t^n$$

$$S(x, y) = \sum_{(k,l) \in \mathcal{S}} d_{k,l} x^k y^l$$



$$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{B}' = (\mathcal{A} + \mathcal{B}') + \mathcal{B}$$

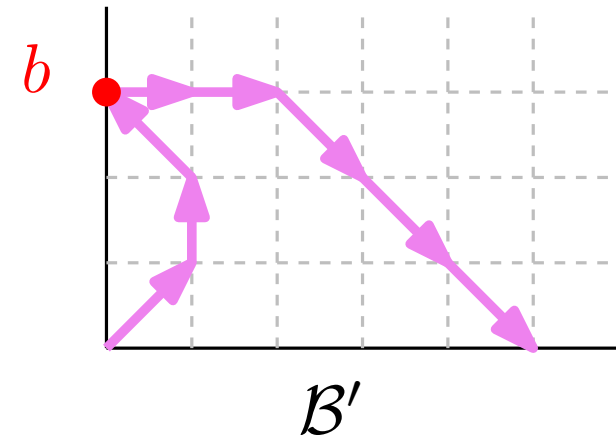
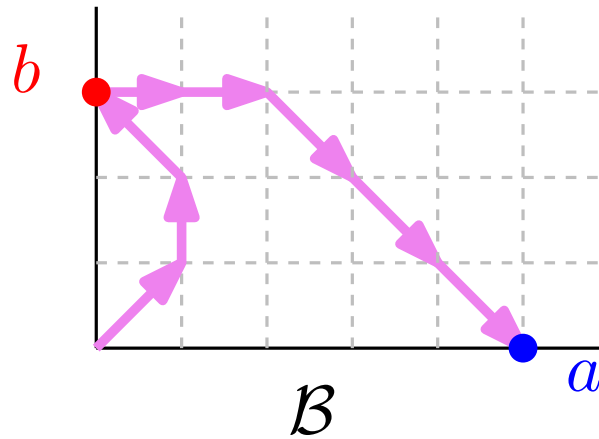
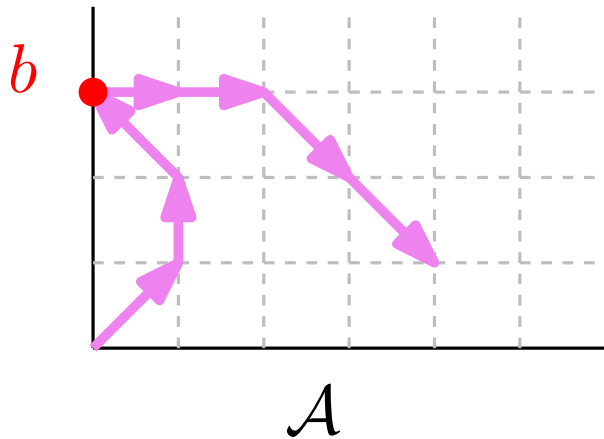
$$A(x, y) + B(x, y) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad B(x, y) = Q_{j=0}(x, y) + Q_{i=0}(x, y) - Q_{i=j=0}(x, y)$$

$$B'(x, y) = \frac{1}{a} Q_{j=0}(x, y) + \frac{1}{b} Q_{i=0}(x, y) - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{ab} \right) Q_{i=j=0}(x, y)$$

Équation fonctionnelle [Beaton, Owczarek, Rechnitzer, 2019]

$$Q(x, y) = \sum_{\text{marches}} \left(\prod_{p \in \mathcal{S}} d_p^{n_p} \right) a^{n_x} b^{n_y} x^i y^j t^n$$

$$S(x, y) = \sum_{(k,l) \in \mathcal{S}} d_{k,l} x^k y^l$$



$$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{B}' = (\mathcal{A} + \mathcal{B}') + \mathcal{B}$$

$$A(x, y) + B(x, y) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad B(x, y) = Q_{j=0}(x, y) + Q_{i=0}(x, y) - Q_{i=j=0}(x, y)$$

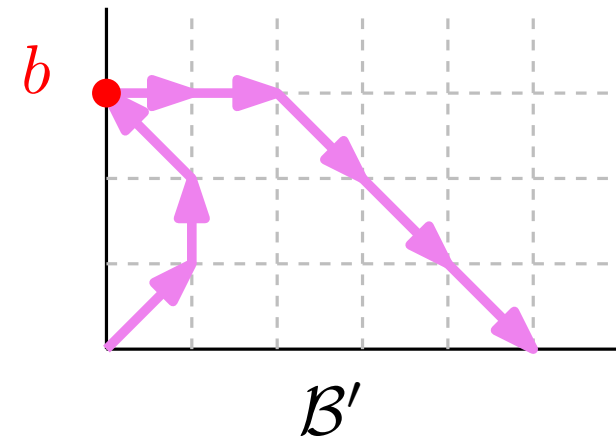
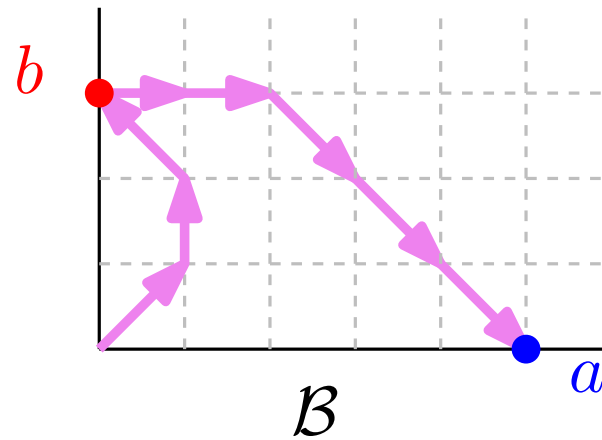
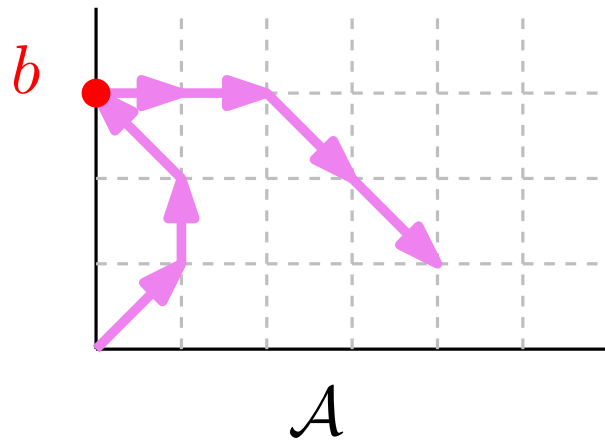
$$B'(x, y) = \frac{1}{a} Q_{j=0}(x, y) + \frac{1}{b} Q_{i=0}(x, y) - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{ab} \right) Q_{i=j=0}(x, y)$$

$$\begin{aligned} A(x, y) + B'(x, y) &= \frac{1}{ab} + tS(x, y) \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\quad - \frac{t}{x} ([x^{-1}] S(x, y)) Q_{i=0}(x, y) - \frac{t}{y} ([y^{-1}] S(x, y)) Q_{j=0}(x, y) \\ &\quad + \frac{t}{xy} ([x^{-1} y^{-1}] S(x, y)) Q_{i=j=0}(x, y) \end{aligned}$$

Équation fonctionnelle [Beaton, Owczarek, Rechnitzer, 2019]

$$Q(x, y) = \sum_{\text{marches}} \left(\prod_{p \in \mathcal{S}} d_p^{n_p} \right) a^{n_x} b^{n_y} x^i y^j t^n$$

$$S(x, y) = \sum_{(k,l) \in \mathcal{S}} d_{k,l} x^k y^l$$



$$\begin{aligned}
 xy(1 - tS(x, y))\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{xy}{ab} \\
 &+ ((1 - 1/b)x - t([x^{-1}]S(x, y)))yQ(0, y) \\
 &+ ((1 - 1/a)y - t([y^{-1}]S(x, y)))xQ(x, 0) \\
 &- \left(\frac{xy}{ab}(1 - a)(1 - b) - t[x^{-1}y^{-1}]S(x, y) \right) Q(0, 0)
 \end{aligned}$$

Équation à deux **variables catalytiques** x et y

Classification

$Q(x, y)$ la série des marches est-elle :

Classification

$Q(x, y)$ la série des marches est-elle :

Rationnelle ?

$$Q(x, y) = A(x, y, t) / B(x, y, t)$$

Classification

$Q(x, y)$ la série des marches est-elle :

Rationnelle ?

$$Q(x, y) = A(x, y, t) / B(x, y, t)$$

Algébrique ?

$$P(x, y, t, Q(x, y)) = 0$$

Classification

$Q(x, y)$ la série des marches est-elle :

Rationnelle ?

$$Q(x, y) = A(x, y, t) / B(x, y, t)$$

Algébrique ?

$$P(x, y, t, Q(x, y)) = 0$$

D-finie ?

$$P_z(x, y, t, \partial_z)(Q(x, y)) = 0 \quad \forall z \in \{x, y, t\}$$

Classification

$Q(x, y)$ la série des marches est-elle :

Rationnelle ?

$$Q(x, y) = A(x, y, t)/B(x, y, t)$$

Algébrique ?

$$P(x, y, t, Q(x, y)) = 0$$

D-finie ?

$$P_z(x, y, t, \partial_z)(Q(x, y)) = 0 \quad \forall z \in \{x, y, t\}$$

D-algébrique ?

$$P_z(x, y, t, \partial_z^{0,1,\dots} Q(x, y)) = 0 \quad \forall z \in \{x, y, t\}$$

Classification

$Q(x, y)$ la série des marches est-elle :

Rationnelle ?

∩

Algébrique ?

∩

D-finie ?

∩

D-algébrique ?

$$Q(x, y) = A(x, y, t) / B(x, y, t)$$

$$P(x, y, t, Q(x, y)) = 0$$

$$P_z(x, y, t, \partial_z)(Q(x, y)) = 0 \quad \forall z \in \{x, y, t\}$$

$$P_z(x, y, t, \partial_z^{0,1,\dots} Q(x, y)) = 0 \quad \forall z \in \{x, y, t\}$$

Classification

$Q(x, y)$ la série des marches est-elle :

Rationnelle ?

\cap

Algébrique ?

\cap

D-finie ?

\cap

D-algébrique ?

Hypertranscendante ?

$$Q(x, y) = A(x, y, t)/B(x, y, t)$$

$$P(x, y, t, Q(x, y)) = 0$$

$$P_z(x, y, t, \partial_z)(Q(x, y)) = 0 \quad \forall z \in \{x, y, t\}$$

$$P_z(x, y, t, \partial_z^{0,1,\dots} Q(x, y)) = 0 \quad \forall z \in \{x, y, t\}$$

Classification des marches à petits pas ($a=b=1$) ('08-'18)

79 cas non triviaux à symétrie près

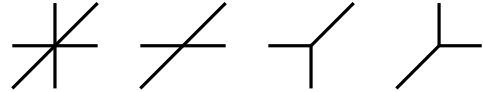

Classification des marches à petits pas ($a=b=1$) ('08-'18)

79 cas non triviaux à symétrie près

- Algébriques : 4 modèles 

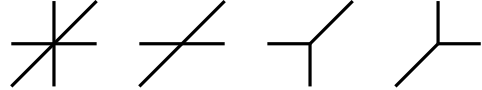


Classification des marches à petits pas ($a=b=1$) ('08-'18)

79 cas non triviaux à symétrie près

- **Algébriques** : 4 modèles 
- **D-finis** : 19 modèles, par exemple 

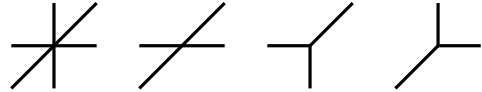

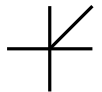

Classification des marches à petits pas ($a=b=1$) ('08-'18)

79 cas non triviaux à symétrie près

- **Algébriques** : 4 modèles 
- **D-finis** : 19 modèles, par exemple 
- **D-algébriques** : 9 modèles, par exemple 

Classification des marches à petits pas ($a=b=1$) ('08-'18)


79 cas non triviaux à symétrie près

- **Algébriques** : 4 modèles 
- **D-finis** : 19 modèles, par exemple 
- **D-algébriques** : 9 modèles, par exemple 
- **Hypertranscendants** : 47 modèles, par exemple 

Classification des marches à petits pas ($a=b=1$) ('08-'18)

79 cas non triviaux à symétrie près

• **Algébriques** : **4** modèles 

• **D-finis** : **19** modèles, par exemple 

• **D-algébriques** : **9** modèles, par exemple 

• **Hypertranscendants** : **47** modèles, par exemple 

Combinatoire : Bousquet-Mélou, Melczer, Mishna, Rechnitzer,...

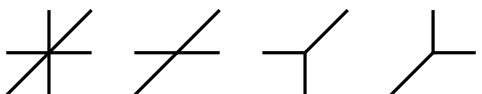

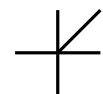

Calcul formel : Bostan, Kauers, Salvy, Zeilberger, ...

Probabilités : Fayolle, Kurkova, Raschel,...

Théorie de Galois différentielle : Dreyfus, Hardouin, Roques, Singer,...

Classification des marches à petits pas ($a=b=1$) ('08-'18)

79 cas non triviaux à symétrie près

- **Algébriques** : 4 modèles 
- **D-finis** : 19 modèles, par exemple 
- **D-algébriques** : 9 modèles, par exemple 
- **Hypertranscendants** : 47 modèles, par exemple 

Combinatoire : Bousquet-Mélou, Melczer, Mishna, Rechnitzer,...

Calcul formel : Bostan, Kauers, Salvy, Zeilberger, ...

Probabilités : Fayolle, Kurkova, Raschel,...

Théorie de Galois différentielle : Dreyfus, Hardouin, Roques, Singer,...

Remarque: maintenant très bien compris pour les petits pas à poids
(voir [Dreyfus, Elvey-Price, Raschel, 2024(a)])

Classification des marches à petits pas ($a=b=1$) ('08-'18)

79 cas non triviaux à symétrie près

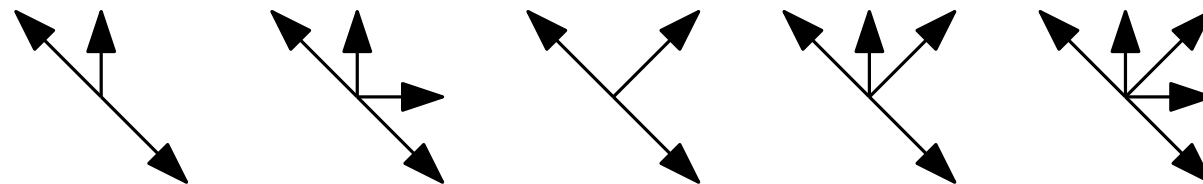
- **Hypertranscendants** : 47 modèles, par exemple 

Classification des marches à petits pas ($a=b=1$) ('08-'18)

79 cas non triviaux à symétrie près

- **Hypertranscendants** : 47 modèles, par exemple 

Théorème [Dreyfus,Hardouin,Roques,Singer,2018]



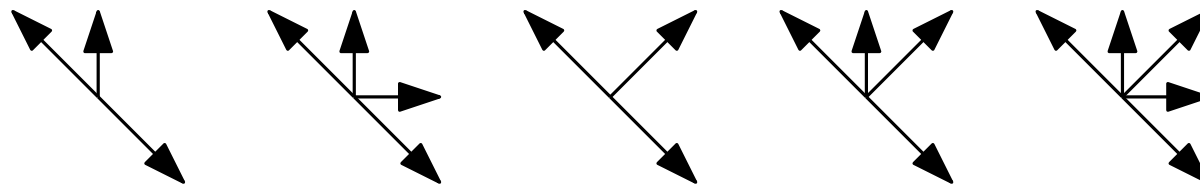
Tous les modèles de **genre 0** sont **hypertranscendants**.

Classification des marches à petits pas ($a=b=1$) ('08-'18)

79 cas non triviaux à symétrie près

- **Hypertranscendants** : 47 modèles, par exemple 

Théorème [Dreyfus,Hardouin,Roques,Singer,2018]



Tous les modèles de **genre 0** sont **hypertranscendants**.

Question: Le sont-ils toujours en comptant les interactions ?

Classification des modèles de genre 0 à bords interactifs

Paramètres : $(d_p)_{p \in \mathcal{S}}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ dans \mathbb{C}

Classification des modèles de genre 0 à bords interactifs

Paramètres : $(d_p)_{p \in \mathcal{S}}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ dans \mathbb{C}

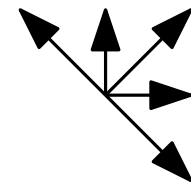
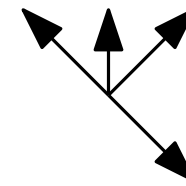
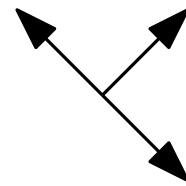
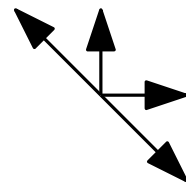
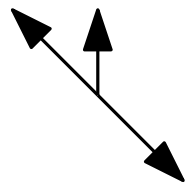
Question : Nature de la série génératrice $Q(x, y)$

Classification des modèles de genre 0 à bords interactifs

Paramètres : $(d_p)_{p \in \mathcal{S}}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ dans \mathbb{C}

Question : Nature de la série génératrice $Q(x, y)$

Théorème [B., 2024]

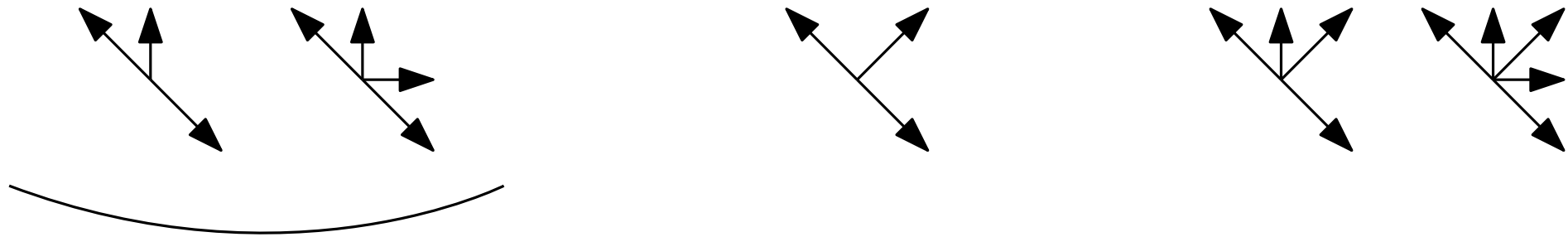


Classification des modèles de genre 0 à bords interactifs

Paramètres : $(d_p)_{p \in \mathcal{S}}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ dans \mathbb{C}

Question : Nature de la série génératrice $Q(x, y)$

Théorème [B., 2024]



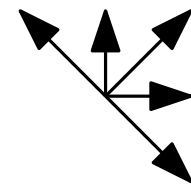
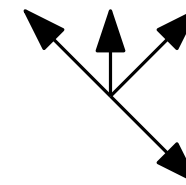
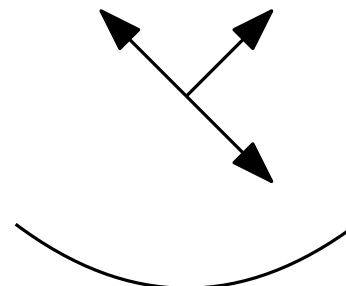
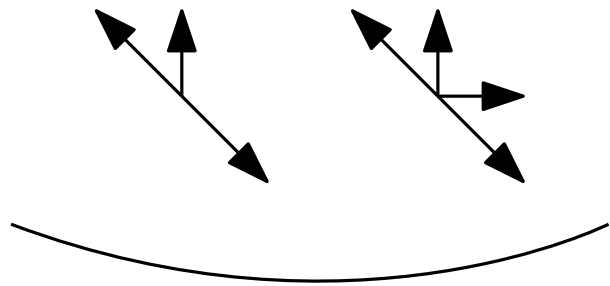
Rationnels ssi $a + b = ab$

Classification des modèles de genre 0 à bords interactifs

Paramètres : $(d_p)_{p \in \mathcal{S}}, a \neq 0, b \neq 0$ dans \mathbb{C}

Question : Nature de la série génératrice $Q(x, y)$

Théorème [B., 2024]



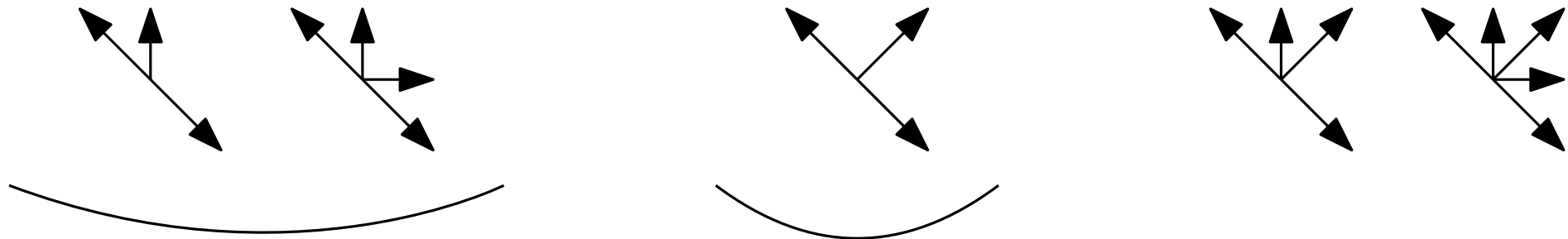
Rationnels ssi $a + b = ab$ **Algébrique** ssi $a = b = 2$

Classification des modèles de genre 0 à bords interactifs

Paramètres : $(d_p)_{p \in \mathcal{S}}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ dans \mathbb{C}

Question : Nature de la série génératrice $Q(x, y)$

Théorème [B., 2024]



Rationnels ssi $a + b = ab$ **Algébrique** ssi $a = b = 2$

Pour tous les autres cas, $Q(x, y)$ est **hypertranscendante** (selon x, y).

II. Équations aux q-différences

Équation aux q-différences I: le noyau

$$\frac{1}{xy}K(x, y)\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \omega + \gamma_1(x, y)xQ(x, 0) + \gamma_2(x, y)yQ(0, y)$$

Équation aux q-différences I: le noyau

$$\frac{1}{xy}K(x, y)\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \omega + \gamma_1(x, y)xQ(x, 0) + \gamma_2(x, y)yQ(0, y)$$

- $\omega \in \mathbb{Q}(a, b)$, et $\gamma_1(x, y), \gamma_2(x, y) \in \mathbb{Q}(a, b, d_p, x, y, t)$

Équation aux q-différences I: le noyau

$$\frac{1}{xy}K(x, y)\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \omega + \gamma_1(x, y)xQ(x, 0) + \gamma_2(x, y)yQ(0, y)$$

- $\omega \in \mathbb{Q}(a, b)$, et $\gamma_1(x, y), \gamma_2(x, y) \in \mathbb{Q}(a, b, d_p, x, y, t)$
- $K(x, y) := xy(1 - tS(x, y)) \in \mathbb{Q}(d_{i,j})[x, y, t]$ le **noyau**

Équation aux q-différences I: le noyau

$$\frac{1}{xy}K(x, y)\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \omega + \gamma_1(x, y)xQ(x, 0) + \gamma_2(x, y)yQ(0, y)$$

- $\omega \in \mathbb{Q}(a, b)$, et $\gamma_1(x, y), \gamma_2(x, y) \in \mathbb{Q}(a, b, d_p, x, y, t)$
- $K(x, y) := xy(1 - tS(x, y)) \in \mathbb{Q}(d_{i,j})[x, y, t]$ le **noyau**

Idée: annuler le noyau \Rightarrow équations sur $Q(x, 0)$ et $Q(0, y)$

Équation aux q-différences I: le noyau

$$\frac{1}{xy}K(x, y)\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \omega + \gamma_1(x, y)xQ(x, 0) + \gamma_2(x, y)yQ(0, y)$$

- $\omega \in \mathbb{Q}(a, b)$, et $\gamma_1(x, y), \gamma_2(x, y) \in \mathbb{Q}(a, b, d_p, x, y, t)$
- $K(x, y) := xy(1 - tS(x, y)) \in \mathbb{Q}(d_{i,j})[x, y, t]$ le **noyau**

Idée: annuler le noyau \Rightarrow équations sur $Q(x, 0)$ et $Q(0, y)$

Si $K(x', y') = 0$ et $Q(x', y')$, $\gamma_1(x', y')$ et $\gamma_2(x', y')$ bien définies, on a

$$0 = \omega + \gamma_1(x', y')x'Q(x', 0) + \gamma_2(x', y')y'Q(0, y')$$

Équation aux q -différences II: paramétrage du noyau et symétries [DHR18]

Équation aux q-différences II: paramétrage du noyau et symétries [DHRS18]

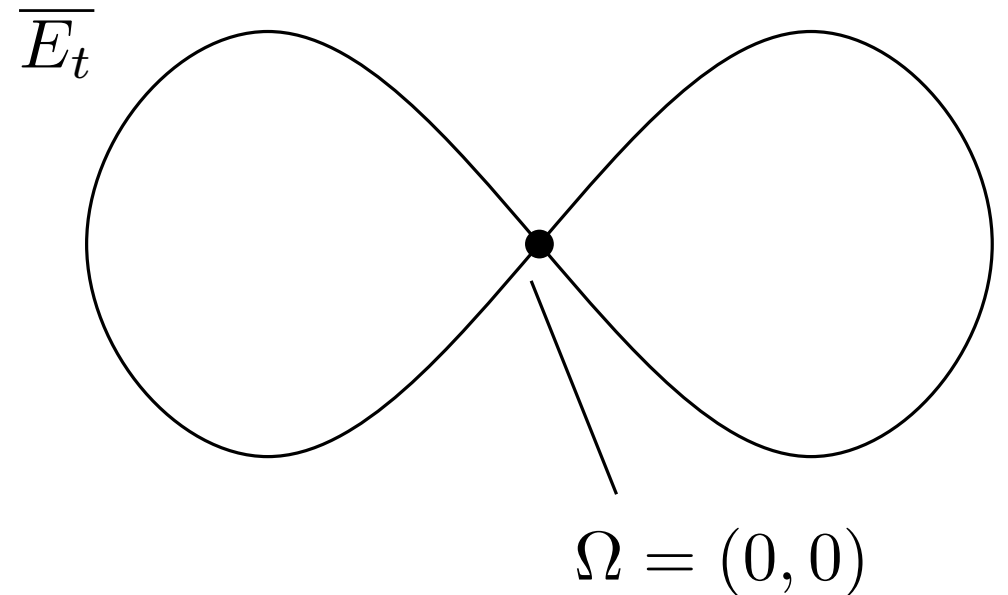
$((d_p)_{p \in \mathcal{S}}$ complexes fixés, $t > 0$ petit réel transcendant sur $\mathbb{Q}(d_p, a, b)$)

Courbe du noyau: $\overline{E_t} = \{(x, y) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \mid K(x, y) = 0\}$ $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Équation aux q-différences II: paramétrage du noyau et symétries [DHRS18]

$((d_p)_{p \in \mathcal{S}}$ complexes fixés, $t > 0$ petit réel transcendant sur $\mathbb{Q}(d_p, a, b)$)

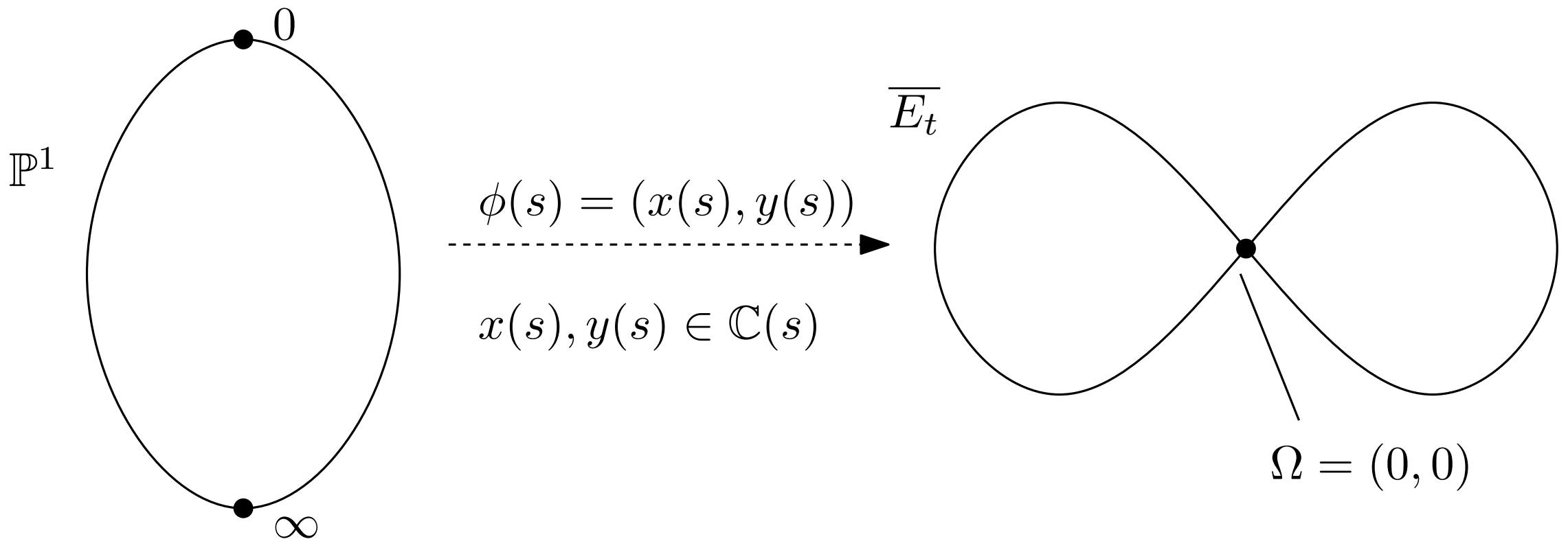
Courbe du noyau: $\overline{E}_t = \{(x, y) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \mid K(x, y) = 0\}$ $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$



Équation aux q-différences II: paramétrage du noyau et symétries [DHRS18]

$((d_p)_{p \in \mathcal{S}}$ complexes fixés, $t > 0$ petit réel transcendant sur $\mathbb{Q}(d_p, a, b)$)

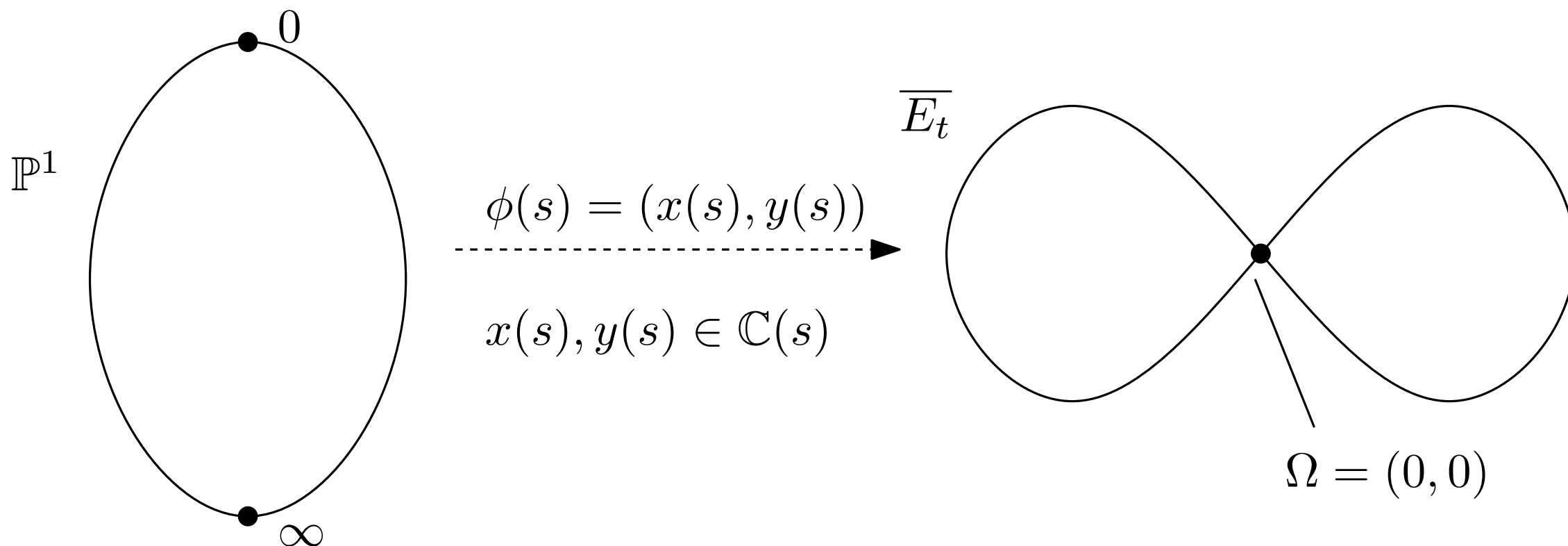
Courbe du noyau: $\overline{E}_t = \{(x, y) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \mid K(x, y) = 0\}$ $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$



Équation aux q-différences II: paramétrage du noyau et symétries [DHRS18]

$((d_p)_{p \in \mathcal{S}}$ complexes fixés, $t > 0$ petit réel transcendant sur $\mathbb{Q}(d_p, a, b)$)

Courbe du noyau: $\overline{E}_t = \{(x, y) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \mid K(x, y) = 0\}$ $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$



$$\iota_1(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{s}$$

$$\iota_2(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{q}{s} \quad q > 1$$

(le **groupe**)

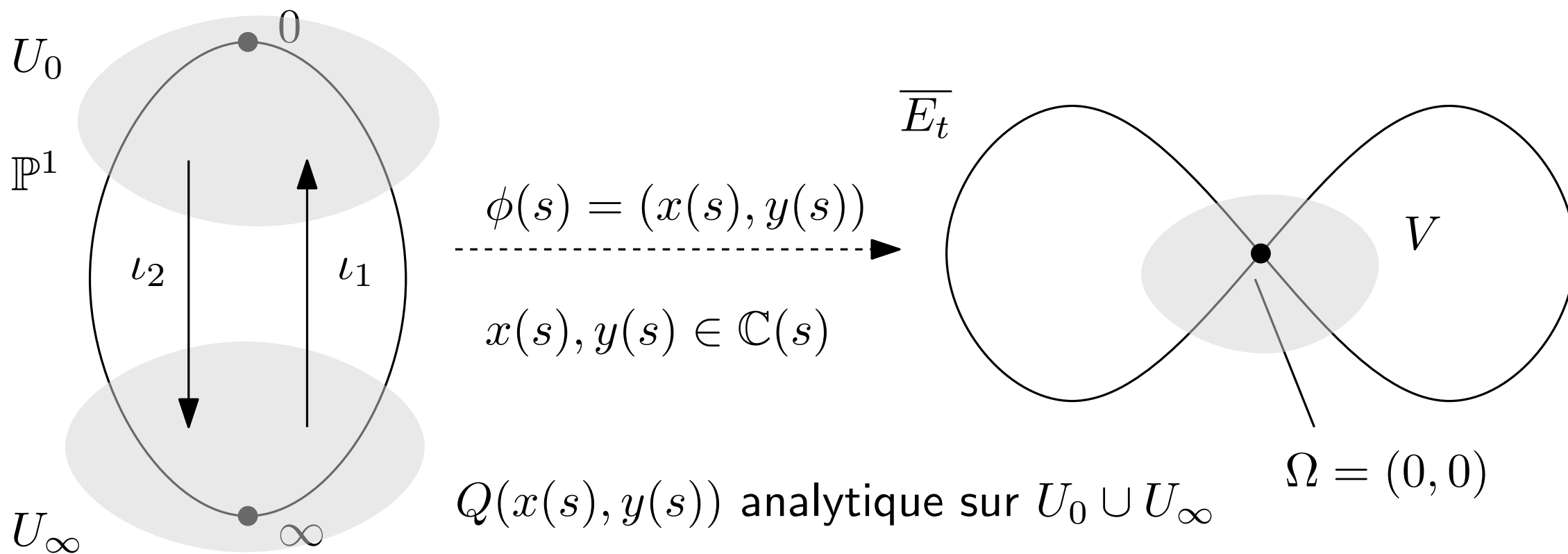
$$x^{\iota_1}(s) \stackrel{\text{def}}{=} x(1/s) = x(s)$$

$$y^{\iota_2}(s) \stackrel{\text{def}}{=} y(q/s) = y(s)$$

Équation aux q-différences II: paramétrage du noyau et symétries [DHRS18]

$((d_p)_{p \in \mathcal{S}}$ complexes fixés, $t > 0$ petit réel transcendant sur $\mathbb{Q}(d_p, a, b)$)

Courbe du noyau: $\overline{E}_t = \{(x, y) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \mid K(x, y) = 0\}$ $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$



$$\begin{aligned} \iota_1(s) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{s} \\ \iota_2(s) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{q}{s} \quad q > 1 \end{aligned}$$

(le **groupe**)

$$x^{\iota_1}(s) \stackrel{\text{def}}{=} x(1/s) = x(s)$$

$$y^{\iota_2}(s) \stackrel{\text{def}}{=} y(q/s) = y(s)$$

Équation aux q-différences III: les équations

$$\frac{1}{xy}K(x, y)\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \omega + \gamma_1(x, y)xQ(x, 0) + \gamma_2(x, y)yQ(0, y)$$

Équation aux q-différences III: les équations

$$\frac{1}{xy} K(x, y) \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \omega + \gamma_1(x, y) x Q(x, 0) + \gamma_2(x, y) y Q(0, y)$$

Évaluation en $(x, y) = (x(s), y(s))$ pour $s \in U_0$:

$$0 = \omega + \tilde{\gamma}_1(s) x(s) Q(x(s), 0) + \tilde{\gamma}_2(s) y(s) Q(0, y(s))$$
$$\tilde{\gamma}_1(s) = \gamma_1(x(s), y(s))$$
$$\tilde{\gamma}_2(s) = \gamma_2(x(s), y(s))$$

Équation aux q-différences III: les équations

$$\frac{1}{xy} K(x, y) \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \omega + \gamma_1(x, y) x Q(x, 0) + \gamma_2(x, y) y Q(0, y)$$

Évaluation en $(x, y) = (x(s), y(s))$ pour $s \in U_0$:

$$0 = \omega + \tilde{\gamma}_1(s) x(s) Q(x(s), 0) + \tilde{\gamma}_2(s) y(s) Q(0, y(s)) \quad \begin{array}{l} \tilde{\gamma}_1(s) = \gamma_1(x(s), y(s)) \\ \tilde{\gamma}_2(s) = \gamma_2(x(s), y(s)) \end{array}$$

Évaluation en $(x, y) = (x(\frac{q}{s}), y(\frac{q}{s})) = (x(\frac{s}{q}), y(s))$ pour $s \in U_0$:

$$0 = \omega + \tilde{\gamma}_1(\frac{q}{s}) x(\frac{s}{q}) Q(x(\frac{s}{q}), 0) + \tilde{\gamma}_2(\frac{q}{s}) y(s) Q(0, y(s))$$

Équation aux q-différences III: les équations

$$\frac{1}{xy} K(x, y) \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \omega + \gamma_1(x, y) x Q(x, 0) + \gamma_2(x, y) y Q(0, y)$$

Évaluation en $(x, y) = (x(s), y(s))$ pour $s \in U_0$:

$$0 = \omega + \tilde{\gamma}_1(s) x(s) Q(x(s), 0) + \tilde{\gamma}_2(s) y(s) Q(0, y(s)) \quad \begin{array}{l} \tilde{\gamma}_1(s) = \gamma_1(x(s), y(s)) \\ \tilde{\gamma}_2(s) = \gamma_2(x(s), y(s)) \end{array}$$

Évaluation en $(x, y) = (x(\frac{q}{s}), y(\frac{q}{s})) = (x(\frac{s}{q}), y(s))$ pour $s \in U_0$:

$$0 = \omega + \tilde{\gamma}_1(\frac{q}{s}) x(\frac{s}{q}) Q(x(\frac{s}{q}), 0) + \tilde{\gamma}_2(\frac{q}{s}) y(s) Q(0, y(s))$$

$$\check{F}(s) = x(\frac{s}{q}) Q(x(\frac{s}{q}), 0) \quad \check{F}(\frac{s}{q}) = \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}^{\iota_2}}(s) \check{F}(s) + \left(\frac{\omega}{\tilde{\gamma}_2(s)} - \frac{\omega}{\tilde{\gamma}_2^{\iota_2}(s)} \right) \frac{1}{\tilde{\gamma}^{\iota_2}(s)}$$

Équation aux q -différences IV: prolongement méromorphe

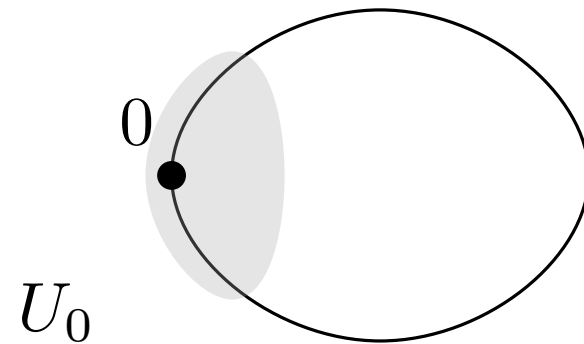
Équation aux q-différences IV: prolongement méromorphe

$$\check{F}\left(\frac{s}{q}\right) = \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}^{\iota_2}}(s) \check{F}(s) + \left(\frac{\omega}{\tilde{\gamma}_2(s)} - \frac{\omega}{\tilde{\gamma}_2^{\iota_2}(s)} \right) \frac{1}{\tilde{\gamma}^{\iota_2}(s)} \quad \text{pour } s \in U_0$$

Équation aux q-différences IV: prolongement méromorphe

$$\check{F}\left(\frac{s}{q}\right) = \frac{\check{\gamma}}{\check{\gamma}^{\iota_2}}(s) \check{F}(s) + \left(\frac{\omega}{\check{\gamma}_2(s)} - \frac{\omega}{\check{\gamma}_2^{\iota_2}(s)} \right) \frac{1}{\check{\gamma}^{\iota_2}(s)} \quad \text{pour } s \in U_0$$

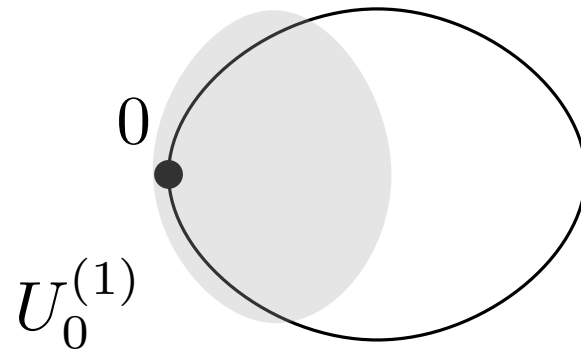
$q > 1$



Équation aux q-différences IV: prolongement méromorphe

$$\check{F}\left(\frac{s}{q}\right) = \frac{\check{\gamma}}{\check{\gamma}^{l_2}}(s) \check{F}(s) + \left(\frac{\omega}{\check{\gamma}_2(s)} - \frac{\omega}{\check{\gamma}_2^{l_2}(s)} \right) \frac{1}{\check{\gamma}^{l_2}(s)} \quad \text{pour } s \in U_0$$

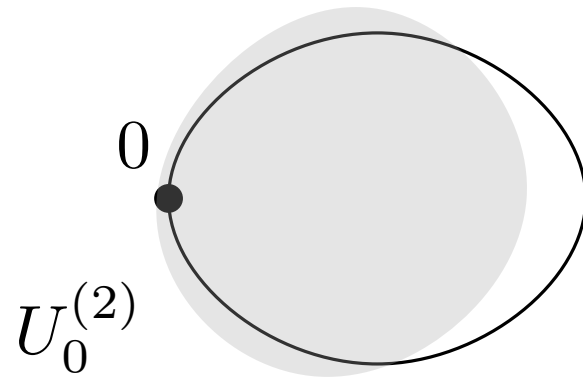
$q > 1$



Équation aux q-différences IV: prolongement méromorphe

$$\check{F}\left(\frac{s}{q}\right) = \frac{\check{\gamma}}{\check{\gamma}^{l_2}}(s) \check{F}(s) + \left(\frac{\omega}{\check{\gamma}_2(s)} - \frac{\omega}{\check{\gamma}_2^{l_2}(s)} \right) \frac{1}{\check{\gamma}^{l_2}(s)} \quad \text{pour } s \in U_0$$

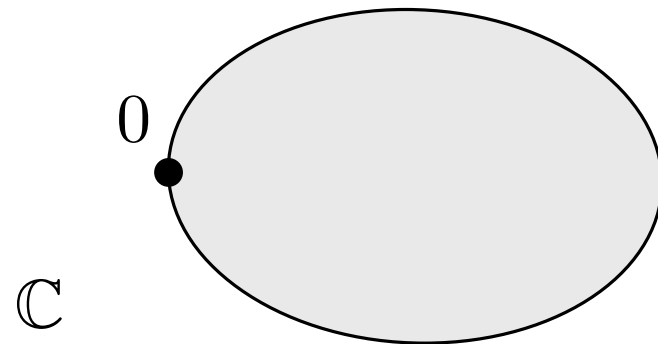
$q > 1$



Équation aux q-différences IV: prolongement méromorphe

$$\check{F}\left(\frac{s}{q}\right) = \frac{\check{\gamma}}{\check{\gamma}^{\iota_2}}(s) \check{F}(s) + \left(\frac{\omega}{\check{\gamma}_2(s)} - \frac{\omega}{\check{\gamma}_2^{\iota_2}(s)} \right) \frac{1}{\check{\gamma}^{\iota_2}(s)} \quad \text{pour } s \in U_0$$

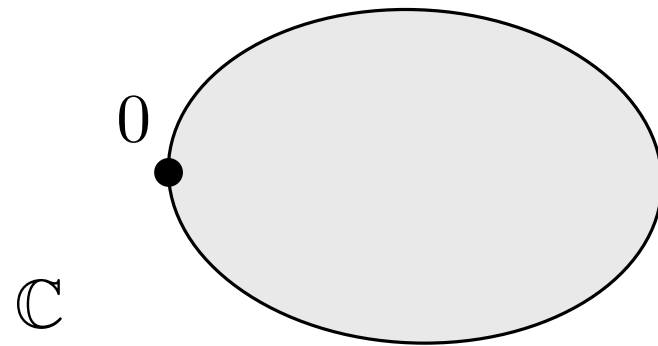
$q > 1$



Équation aux q-différences IV: prolongement méromorphe

$$\check{F}\left(\frac{s}{q}\right) = \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}^{\iota_2}}(s) \check{F}(s) + \left(\frac{\omega}{\tilde{\gamma}_2(s)} - \frac{\omega}{\tilde{\gamma}_2^{\iota_2}(s)} \right) \frac{1}{\tilde{\gamma}^{\iota_2}(s)} \quad \text{pour } s \in U_0$$

$q > 1$



$$\tilde{F}\left(\frac{s}{q}\right) = \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}^{\iota_2}}(s) \tilde{F}(s) + \left(\frac{\omega}{\tilde{\gamma}_2(s)} - \frac{\omega}{\tilde{\gamma}_2^{\iota_2}(s)} \right) \frac{1}{\tilde{\gamma}^{\iota_2}(s)} \quad \text{pour } s \in \mathbb{C}$$

Équations aux q-différences V: caractérisation

$$\frac{1}{xy} K(x, y) \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \omega + \gamma_1(x, y) x Q(x, 0) + \gamma_2(x, y) y Q(0, y)$$

$$\tilde{F}\left(\frac{s}{q}\right) = \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}^{\iota_2}}(s) \tilde{F}(s) + \left(\frac{\omega}{\tilde{\gamma}_2(s)} - \frac{\omega}{\tilde{\gamma}_2^{\iota_2}(s)} \right) \frac{1}{\tilde{\gamma}^{\iota_2}(s)}$$

$$0 = \omega + \tilde{\gamma}_1(s) \tilde{F}(s) + \tilde{\gamma}_2(s) \tilde{G}(s) \quad (E)$$

$$\tilde{F}(s) = x(s) Q(x(s), 0) \quad \tilde{G}(s) = y(s) Q(0, y(s))$$

Équations aux q-différences V: caractérisation

$$\frac{1}{xy} K(x, y) \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \omega + \gamma_1(x, y) x Q(x, 0) + \gamma_2(x, y) y Q(0, y)$$

$$\tilde{F}\left(\frac{s}{q}\right) = \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}^{\iota_2}}(s) \tilde{F}(s) + \left(\frac{\omega}{\tilde{\gamma}_2(s)} - \frac{\omega}{\tilde{\gamma}_2^{\iota_2}(s)} \right) \frac{1}{\tilde{\gamma}^{\iota_2}(s)}$$

$$0 = \omega + \tilde{\gamma}_1(s) \tilde{F}(s) + \tilde{\gamma}_2(s) \tilde{G}(s) \quad (E)$$

$$\tilde{F}(s) = x(s) Q(x(s), 0) \quad \tilde{G}(s) = y(s) Q(0, y(s)) \quad \text{pour } s \in U_0$$

$Q(x, y)$ algébrique $\Leftrightarrow \tilde{F}(s)$ et $\tilde{G}(s)$ algébriques

$Q(x, y)$ D-finie $\Leftrightarrow \tilde{F}(s)$ et $\tilde{G}(s)$ D-finies

$Q(x, y)$ D-algébrique $\Leftrightarrow \tilde{F}(s)$ et $\tilde{G}(s)$ D-algébriques

Équations aux q -différences VI: critère Galoisien

Équations aux q -différences VI: critère Galoisien

Théorème [Ishizaki,98]

Les solutions méromorphes d'équations aux q -différences à coefficients rationnels sont soit **rationnelles** soit **hypertranscendantes**.

Équations aux q-différences VI: critère Galoisien

Théorème [Ishizaki,98]

Les solutions méromorphes d'équations aux q-différences à coefficients rationnels sont soit **rationnelles** soit **hypertranscendantes**.

Stratégie:

Équations aux q-différences VI: critère Galoisien

Théorème [Ishizaki,98]

Les solutions méromorphes d'équations aux q-différences à coefficients rationnels sont soit **rationnelles** soit **hypertranscendantes**.

Stratégie:

$Q(x, y)$ est D-algébrique $\Leftrightarrow \tilde{F}(s)$ est D-algébrique $\Leftrightarrow \tilde{F}(s)$ rationnelle

Équations aux q-différences VI: critère Galoisien

Théorème [Ishizaki,98]

Les solutions méromorphes d'équations aux q-différences à coefficients rationnels sont soit **rationnelles** soit **hypertranscendantes**.

Stratégie:

$Q(x, y)$ est D-algébrique $\Leftrightarrow \tilde{F}(s)$ est D-algébrique $\Leftrightarrow \tilde{F}(s)$ rationnelle

- si (E) a une unique solution, rationnelle, on montre que $Q(x, y)$ est **algébrique**

Équations aux q-différences VI: critère Galoisien

Théorème [Ishizaki,98]

Les solutions méromorphes d'équations aux q-différences à coefficients rationnels sont soit **rationnelles** soit **hypertranscendantes**.

Stratégie:

$Q(x, y)$ est D-algébrique $\Leftrightarrow \tilde{F}(s)$ est D-algébrique $\Leftrightarrow \tilde{F}(s)$ rationnelle

- si (E) a une unique solution, rationnelle, on montre que $Q(x, y)$ est **algébrique**
- si (E) n'a pas de solution rationnelle, on montre que $Q(x, y)$ est **hypertranscendante**

III. Équations de découplage

Équations de découplage

$$\tilde{F}\left(\frac{s}{q}\right) = \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}^{\iota_2}}(s) \tilde{F}(s) + \left(\frac{\omega}{\tilde{\gamma}_2(s)} - \frac{\omega}{\tilde{\gamma}_2^{\iota_2}(s)} \right) \frac{1}{\tilde{\gamma}^{\iota_2}(s)} \quad (E)$$

$$\tilde{\gamma}_1(s) \tilde{F}(s) + \tilde{\gamma}_2(s) \tilde{G}(s) + \omega = 0$$

Équations de découplage

$$\tilde{F}\left(\frac{s}{q}\right) = \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}^{\iota_2}}(s)\tilde{F}(s) + \left(\frac{\omega}{\tilde{\gamma}_2(s)} - \frac{\omega}{\tilde{\gamma}_2^{\iota_2}(s)}\right) \frac{1}{\tilde{\gamma}^{\iota_2}(s)} \quad (E)$$

$$\tilde{\gamma}_1(s)\tilde{F}(s) + \tilde{\gamma}_2(s)\tilde{G}(s) + \omega = 0$$

Proposition (Découplage)

Si \tilde{F} et \tilde{G} sont dans $\mathbb{C}(s)$ (rationnelles), elles peuvent s'écrire

$$\tilde{F}(s) = \tilde{f}(s) + \tilde{f}_h(s) \qquad \tilde{G}(s) = \tilde{g}(s) + \tilde{g}_h(s),$$

(\tilde{f}, \tilde{g}) et $(\tilde{f}_h, \tilde{g}_h)$ satisfaisant les équations suivantes (de **découplage**) :

$$\tilde{\gamma}_1(s)\tilde{f}(s) + \tilde{\gamma}_2(s)\tilde{g}(s) + \omega = 0 \qquad \tilde{f}^{\iota_1}(s) = \tilde{f}(s) \text{ et } \tilde{g}^{\iota_2}(s) = \tilde{g}(s) \quad (D)$$

$$\tilde{\gamma}_1(s)\tilde{f}_h(s) + \tilde{\gamma}_2(s)\tilde{g}_h(s) = 0 \qquad \tilde{f}_h^{\iota_1}(s) = -\tilde{f}_h(s) \text{ et } \tilde{g}_h^{\iota_2}(s) = -\tilde{g}_h(s) \quad (D_h)$$

Intermède: pôles de fractions

Intermède: pôles de fractions

On se place sur la courbe $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Intermédiaire: pôles de fractions

On se place sur la courbe $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

- Si $f \in \mathbb{C}(s)$ est une fonction de $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, elle a un nombre fini de **zéros** et de **pôles**.

Exemple: $\frac{s(s-1)^2}{s-2}$ a comme zéros (0) et (1) et comme pôles (2) et (∞).

Intermède: pôles de fractions

On se place sur la courbe $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

- Si $f \in \mathbb{C}(s)$ est une fonction de $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, elle a un nombre fini de **zéros** et de **pôles**.

Exemple: $\frac{s(s-1)^2}{s-2}$ a comme zéros (0) et (1) et comme pôles (2) et (∞).

- Pour une fonction f , on note son **diviseur**
 $(f) = (f)_0 - (f)_\infty = \sum \text{zéros} - \sum \text{pôles}$ (avec multiplicité).

Exemple: $\frac{s(s-1)^2}{s-2}$ a comme diviseur $(0) + 2 \cdot (1) - (2) - 2 \cdot (\infty)$.

Intermède: pôles de fractions

On se place sur la courbe $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

- Si $f \in \mathbb{C}(s)$ est une fonction de $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, elle a un nombre fini de **zéros** et de **pôles**.

Exemple: $\frac{s(s-1)^2}{s-2}$ a comme zéros (0) et (1) et comme pôles (2) et (∞).

- Pour une fonction f , on note son **diviseur**
 $(f) = (f)_0 - (f)_\infty = \sum \text{zéros} - \sum \text{pôles}$ (avec multiplicité).

Exemple: $\frac{s(s-1)^2}{s-2}$ a comme diviseur $(0) + 2 \cdot (1) - (2) - 2 \cdot (\infty)$.

- Pour f une fonction et τ un automorphisme tel que $f^\tau = \pm f$, l'ensemble des pôles (resp. des zéros) de f sont stables par τ

Lemme de propagation

$$(\tilde{\gamma}_1) = P_1 + P_2 - 0 - \infty$$

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$\sigma = \iota_2 \circ \iota_1$$

$$(\tilde{\gamma}_2) = P_3 + P_4 - 0 - \infty$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

Lemme de propagation

$$\sigma = \iota_2 \circ \iota_1$$

$$(\tilde{\gamma}_1) = P_1 + P_2 - 0 - \infty$$

$$(\tilde{\gamma}_2) = P_3 + P_4 - 0 - \infty$$

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

P est un pôle de f

Conditions

Lemme de propagation

$$\sigma = \iota_2 \circ \iota_1$$

$$(\tilde{\gamma}_1) = P_1 + P_2 - 0 - \infty$$

$$(\tilde{\gamma}_2) = P_3 + P_4 - 0 - \infty$$

$$\tilde{\gamma}_1 \mathbf{f} + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$\mathbf{f}^{\iota_1} = \mathbf{f} \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

P est un pôle de f

Conditions

Lemme de propagation

$$\sigma = \iota_2 \circ \iota_1$$

$$(\tilde{\gamma}_1) = P_1 + P_2 - 0 - \infty$$

$$(\tilde{\gamma}_2) = P_3 + P_4 - 0 - \infty$$

$$\tilde{\gamma}_1 \mathbf{f} + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$\mathbf{f}^{\iota_1} = \mathbf{f} \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

P est un pôle de f

$\Rightarrow \iota_1 P$ est un pôle de f

Conditions

Lemme de propagation

$$\sigma = \iota_2 \circ \iota_1$$

$$(\tilde{\gamma}_1) = P_1 + P_2 - 0 - \infty$$

$$(\tilde{\gamma}_2) = P_3 + P_4 - 0 - \infty$$

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

P est un pôle de f

$\Rightarrow \iota_1 P$ est un pôle de f

Conditions

Lemme de propagation

$$\sigma = \iota_2 \circ \iota_1$$

$$(\tilde{\gamma}_1) = P_1 + P_2 - 0 - \infty$$

$$(\tilde{\gamma}_2) = P_3 + P_4 - 0 - \infty$$

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

P est un pôle de f

$\Rightarrow \iota_1 P$ est un pôle de f

$\Rightarrow \iota_1 P$ est un pôle de $\tilde{\gamma}_1 f$

Conditions
$\iota_1 P \neq P_1, P_2$

Lemme de propagation

$$\sigma = \iota_2 \circ \iota_1$$

$$(\tilde{\gamma}_1) = P_1 + P_2 - 0 - \infty$$

$$(\tilde{\gamma}_2) = P_3 + P_4 - 0 - \infty$$

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

P est un pôle de f

$\Rightarrow \iota_1 P$ est un pôle de f

$\Rightarrow \iota_1 P$ est un pôle de $\tilde{\gamma}_1 f$

Conditions
$\iota_1 P \neq P_1, P_2$

Lemme de propagation

$$\sigma = \iota_2 \circ \iota_1$$

$$(\tilde{\gamma}_1) = P_1 + P_2 - 0 - \infty$$

$$(\tilde{\gamma}_2) = P_3 + P_4 - 0 - \infty$$

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

P est un pôle de f

$\Rightarrow \iota_1 P$ est un pôle de f

$\Rightarrow \iota_1 P$ est un pôle de $\tilde{\gamma}_1 f$

$\Rightarrow \iota_1 P$ est un pôle de $\tilde{\gamma}_2 g$

Conditions
$\iota_1 P \neq P_1, P_2$

Lemme de propagation

$$\sigma = \iota_2 \circ \iota_1$$

$$(\tilde{\gamma}_1) = P_1 + P_2 - 0 - \infty$$

$$(\tilde{\gamma}_2) = P_3 + P_4 - \mathbf{0} - \infty$$

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

P est un pôle de f

$\Rightarrow \iota_1 P$ est un pôle de f

$\Rightarrow \iota_1 P$ est un pôle de $\tilde{\gamma}_1 f$

$\Rightarrow \iota_1 P$ est un pôle de $\tilde{\gamma}_2 g$

Conditions
$\iota_1 P \neq P_1, P_2$

Lemme de propagation

$$\sigma = \iota_2 \circ \iota_1$$

$$(\tilde{\gamma}_1) = P_1 + P_2 - 0 - \infty$$

$$(\tilde{\gamma}_2) = P_3 + P_4 - \mathbf{0} - \infty$$

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

P est un pôle de f

$\Rightarrow \iota_1 P$ est un pôle de f

$\Rightarrow \iota_1 P$ est un pôle de $\tilde{\gamma}_1 f$

$\Rightarrow \iota_1 P$ est un pôle de $\tilde{\gamma}_2 g$

$\Rightarrow \iota_1 P$ est un pôle de g

Conditions
$\iota_1 P \neq P_1, P_2$ $\iota_1 P \neq 0, \infty$

Lemme de propagation

$$\sigma = \iota_2 \circ \iota_1$$

$$(\tilde{\gamma}_1) = P_1 + P_2 - 0 - \infty$$

$$(\tilde{\gamma}_2) = P_3 + P_4 - 0 - \infty$$

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

P est un pôle de f

$\Rightarrow \iota_1 P$ est un pôle de f

$\Rightarrow \iota_1 P$ est un pôle de $\tilde{\gamma}_1 f$

$\Rightarrow \iota_1 P$ est un pôle de $\tilde{\gamma}_2 g$

$\Rightarrow \iota_1 P$ est un pôle de g

Conditions
$\iota_1 P \neq P_1, P_2$ $\iota_1 P \neq 0, \infty$

Lemme de propagation

$$\sigma = \iota_2 \circ \iota_1$$

$$(\tilde{\gamma}_1) = P_1 + P_2 - 0 - \infty$$

$$(\tilde{\gamma}_2) = P_3 + P_4 - 0 - \infty$$

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

P est un pôle de f

$\Rightarrow \iota_1 P$ est un pôle de f

$\Rightarrow \iota_1 P$ est un pôle de $\tilde{\gamma}_1 f$

$\Rightarrow \iota_1 P$ est un pôle de $\tilde{\gamma}_2 g$

$\Rightarrow \iota_1 P$ est un pôle de g

$\Rightarrow \sigma P$ est un pôle de g

Conditions
$\iota_1 P \neq P_1, P_2$ $\iota_1 P \neq 0, \infty$

Lemme de propagation

$$\sigma = \iota_2 \circ \iota_1$$

$$(\tilde{\gamma}_1) = P_1 + P_2 - 0 - \infty$$

$$(\tilde{\gamma}_2) = P_3 + P_4 - 0 - \infty$$

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

P est un pôle de f

$\Rightarrow \sigma P$ est un pôle de g

Conditions
$\iota_1 P \neq P_1, P_2$ $\iota_1 P \neq 0, \infty$

Lemme de propagation

$$\sigma = \iota_2 \circ \iota_1$$

$$(\tilde{\gamma}_1) = P_1 + P_2 - 0 - \infty$$

$$(\tilde{\gamma}_2) = P_3 + P_4 - 0 - \infty$$

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

P est un pôle de f

$\Rightarrow \sigma P$ est un pôle de g

Conditions
$\iota_1 P \neq P_1, P_2$ $\iota_1 P \neq 0, \infty$

Lemme de propagation

$$\sigma = \iota_2 \circ \iota_1$$

$$(\tilde{\gamma}_1) = P_1 + P_2 - 0 - \infty$$

$$(\tilde{\gamma}_2) = P_3 + P_4 - 0 - \infty$$

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

P est un pôle de f

$\Rightarrow \sigma P$ est un pôle de g

$\Rightarrow \sigma P$ est un pôle de $\tilde{\gamma}_2 g$

Conditions
$\iota_1 P \neq P_1, P_2$
$\iota_1 P \neq 0, \infty$
$\sigma P \neq P_3, P_4$

Lemme de propagation

$$\sigma = \iota_2 \circ \iota_1$$

$$(\tilde{\gamma}_1) = P_1 + P_2 - 0 - \infty$$

$$(\tilde{\gamma}_2) = P_3 + P_4 - 0 - \infty$$

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

P est un pôle de f

$\Rightarrow \sigma P$ est un pôle de g

$\Rightarrow \sigma P$ est un pôle de $\tilde{\gamma}_2 g$

Conditions
$\iota_1 P \neq P_1, P_2$
$\iota_1 P \neq 0, \infty$
$\sigma P \neq P_3, P_4$

Lemme de propagation

$$(\tilde{\gamma}_1) = P_1 + P_2 - 0 - \infty$$

$$\sigma = \iota_2 \circ \iota_1$$

$$(\tilde{\gamma}_2) = P_3 + P_4 - 0 - \infty$$

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

P est un pôle de f

$\Rightarrow \sigma P$ est un pôle de g

$\Rightarrow \sigma P$ est un pôle de $\tilde{\gamma}_2 g$

$\Rightarrow \sigma P$ est un pôle de $\tilde{\gamma}_1 f$

Conditions
$\iota_1 P \neq P_1, P_2$
$\iota_1 P \neq 0, \infty$
$\sigma P \neq P_3, P_4$

Lemme de propagation

$$(\tilde{\gamma}_1) = P_1 + P_2 - 0 - \infty$$

$$\sigma = \iota_2 \circ \iota_1$$

$$(\tilde{\gamma}_2) = P_3 + P_4 - 0 - \infty$$

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

P est un pôle de f

$\Rightarrow \sigma P$ est un pôle de g

$\Rightarrow \sigma P$ est un pôle de $\tilde{\gamma}_2 g$

$\Rightarrow \sigma P$ est un pôle de $\tilde{\gamma}_1 f$

Conditions
$\iota_1 P \neq P_1, P_2$
$\iota_1 P \neq 0, \infty$
$\sigma P \neq P_3, P_4$

Lemme de propagation

$$(\tilde{\gamma}_1) = P_1 + P_2 - 0 - \infty$$

$$\sigma = \iota_2 \circ \iota_1$$

$$(\tilde{\gamma}_2) = P_3 + P_4 - 0 - \infty$$

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

P est un pôle de f

$\Rightarrow \sigma P$ est un pôle de g

$\Rightarrow \sigma P$ est un pôle de $\tilde{\gamma}_2 g$

$\Rightarrow \sigma P$ est un pôle de $\tilde{\gamma}_1 f$

$\Rightarrow \sigma P$ est un pôle de f

Conditions
$\iota_1 P \neq P_1, P_2$
$\iota_1 P \neq 0, \infty$
$\sigma P \neq P_3, P_4$

Lemme de propagation

$$(\tilde{\gamma}_1) = P_1 + P_2 - 0 - \infty$$

$$\sigma = \iota_2 \circ \iota_1$$

$$(\tilde{\gamma}_2) = P_3 + P_4 - 0 - \infty$$

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

P est un pôle de f

$\Rightarrow \sigma P$ est un pôle de f

Conditions
$\iota_1 P \neq P_1, P_2$
$\iota_1 P \neq 0, \infty$
$\sigma P \neq P_3, P_4$
$\sigma P \neq 0, \infty$

Lemme de propagation

$$\sigma = \iota_2 \circ \iota_1$$

$$(\tilde{\gamma}_1) = P_1 + P_2 - 0 - \infty$$

$$(\tilde{\gamma}_2) = P_3 + P_4 - 0 - \infty$$

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

$$\mathcal{L}_f^+ := \{\iota_1 P_1, \iota_1 P_2, \sigma^{-1} P_3, \sigma^{-1} P_4, 0, \infty\} \quad \mathcal{L}_f^- := \{P_1, P_2, \iota_2 P_3, \iota_2 P_4, 0, \infty\}$$

Lemme Soit P un pôle de f

- si $P \notin \mathcal{L}_f^+$ alors $\sigma(P)$ est un pôle de f
- si $P \notin \mathcal{L}_f^-$ alors $\sigma^{-1}(P)$ est un pôle de f

Pôles possibles

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

$$\mathcal{L}_f^- := \{P_1, P_2, \iota_2 P_3, \iota_2 P_4, 0, \infty\} \quad \mathcal{L}_f^+ := \{\iota_1 P_1, \iota_1 P_2, \sigma^{-1} P_3, \sigma^{-1} P_4, 0, \infty\}$$

Soit P un pôle de f différent de 0 ou ∞

Pôles possibles

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

$$\mathcal{L}_f^- := \{P_1, P_2, \iota_2 P_3, \iota_2 P_4, 0, \infty\} \quad \mathcal{L}_f^+ := \{\iota_1 P_1, \iota_1 P_2, \sigma^{-1} P_3, \sigma^{-1} P_4, 0, \infty\}$$

Soit P un pôle de f différent de 0 ou ∞

P

Pôles possibles

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

$$\mathcal{L}_f^- := \{P_1, P_2, \iota_2 P_3, \iota_2 P_4, 0, \infty\} \quad \mathcal{L}_f^+ := \{\iota_1 P_1, \iota_1 P_2, \sigma^{-1} P_3, \sigma^{-1} P_4, 0, \infty\}$$

Soit P un pôle de f différent de 0 ou ∞

$$P \xrightarrow{\sigma} \sigma P$$

Pôles possibles

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

$$\mathcal{L}_f^- := \{P_1, P_2, \iota_2 P_3, \iota_2 P_4, 0, \infty\} \quad \mathcal{L}_f^+ := \{\iota_1 P_1, \iota_1 P_2, \sigma^{-1} P_3, \sigma^{-1} P_4, 0, \infty\}$$

Soit P un pôle de f différent de 0 ou ∞

$$P \xrightarrow{\sigma} \sigma P \xrightarrow{\sigma} \sigma^2 P$$

Pôles possibles

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

$$\mathcal{L}_f^- := \{P_1, P_2, \iota_2 P_3, \iota_2 P_4, 0, \infty\} \quad \mathcal{L}_f^+ := \{\iota_1 P_1, \iota_1 P_2, \sigma^{-1} P_3, \sigma^{-1} P_4, 0, \infty\}$$

Soit P un pôle de f différent de 0 ou ∞

$$P \xrightarrow{\sigma} \sigma P \xrightarrow{\sigma} \sigma^2 P \xrightarrow{\sigma} \dots$$

Pôles possibles

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

$$\mathcal{L}_f^- := \{P_1, P_2, \iota_2 P_3, \iota_2 P_4, 0, \infty\} \quad \mathcal{L}_f^+ := \{\iota_1 P_1, \iota_1 P_2, \sigma^{-1} P_3, \sigma^{-1} P_4, 0, \infty\}$$

Soit P un pôle de f différent de 0 ou ∞

$$P \xrightarrow{\sigma} \sigma P \xrightarrow{\sigma} \sigma^2 P \xrightarrow{\sigma} \dots \xrightarrow{\sigma} Q \in \mathcal{L}_f^+$$

Pôles possibles

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

$$\mathcal{L}_f^- := \{P_1, P_2, \iota_2 P_3, \iota_2 P_4, 0, \infty\} \quad \mathcal{L}_f^+ := \{\iota_1 P_1, \iota_1 P_2, \sigma^{-1} P_3, \sigma^{-1} P_4, 0, \infty\}$$

Soit P un pôle de f différent de 0 ou ∞

$$P \xrightarrow{\sigma^n} Q^+ \in \mathcal{L}_f^+$$

Pôles possibles

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

$$\mathcal{L}_f^- := \{P_1, P_2, \iota_2 P_3, \iota_2 P_4, 0, \infty\} \quad \mathcal{L}_f^+ := \{\iota_1 P_1, \iota_1 P_2, \sigma^{-1} P_3, \sigma^{-1} P_4, 0, \infty\}$$

Soit P un pôle de f différent de 0 ou ∞

$$\sigma^{-1} P \xleftarrow{\sigma^{-1}} P \xrightarrow{\sigma^n} Q^+ \in \mathcal{L}_f^+$$

Pôles possibles

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

$$\mathcal{L}_f^- := \{P_1, P_2, \iota_2 P_3, \iota_2 P_4, 0, \infty\} \quad \mathcal{L}_f^+ := \{\iota_1 P_1, \iota_1 P_2, \sigma^{-1} P_3, \sigma^{-1} P_4, 0, \infty\}$$

Soit P un pôle de f différent de 0 ou ∞

$$\sigma^{-2} P \xleftarrow{\sigma^{-1}} \sigma^{-1} P \xleftarrow{\sigma^{-1}} P \xrightarrow{\sigma^n} Q^+ \in \mathcal{L}_f^+$$

Pôles possibles

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

$$\mathcal{L}_f^- := \{P_1, P_2, \iota_2 P_3, \iota_2 P_4, 0, \infty\} \quad \mathcal{L}_f^+ := \{\iota_1 P_1, \iota_1 P_2, \sigma^{-1} P_3, \sigma^{-1} P_4, 0, \infty\}$$

Soit P un pôle de f différent de 0 ou ∞

$$\dots \xleftarrow{\sigma^{-1}} \sigma^{-2} P \xleftarrow{\sigma^{-1}} \sigma^{-1} P \xleftarrow{\sigma^{-1}} P \xrightarrow{\sigma^n} Q^+ \in \mathcal{L}_f^+$$

Pôles possibles

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

$$\mathcal{L}_f^- := \{P_1, P_2, \iota_2 P_3, \iota_2 P_4, 0, \infty\} \quad \mathcal{L}_f^+ := \{\iota_1 P_1, \iota_1 P_2, \sigma^{-1} P_3, \sigma^{-1} P_4, 0, \infty\}$$

Soit P un pôle de f différent de 0 ou ∞

$$Q^- \in \mathcal{L}_f^- \xleftarrow{\sigma^{-1}} \dots \xleftarrow{\sigma^{-1}} \sigma^{-2} P \xleftarrow{\sigma^{-1}} \sigma^{-1} P \xleftarrow{\sigma^{-1}} P \xrightarrow{\sigma^n} Q^+ \in \mathcal{L}_f^+$$

Pôles possibles

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

$$\mathcal{L}_f^- := \{P_1, P_2, \iota_2 P_3, \iota_2 P_4, 0, \infty\} \quad \mathcal{L}_f^+ := \{\iota_1 P_1, \iota_1 P_2, \sigma^{-1} P_3, \sigma^{-1} P_4, 0, \infty\}$$

Soit P un pôle de f différent de 0 ou ∞

$$Q^- \in \mathcal{L}_f^- \xleftarrow{\sigma^{-m}} P \xrightarrow{\sigma^n} Q^+ \in \mathcal{L}_f^+$$

Pôles possibles

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

$$\mathcal{L}_f^- := \{P_1, P_2, \iota_2 P_3, \iota_2 P_4, 0, \infty\} \quad \mathcal{L}_f^+ := \{\iota_1 P_1, \iota_1 P_2, \sigma^{-1} P_3, \sigma^{-1} P_4, 0, \infty\}$$

Soit P un pôle de f différent de 0 ou ∞

$$Q^- \in \mathcal{L}_f^- \xleftarrow{\sigma^{-m}} P \xrightarrow{\sigma^n} Q^+ \in \mathcal{L}_f^+$$

- Si pour tout $Q^- \in \mathcal{L}_f^-$ et $Q^+ \in \mathcal{L}_f^+$ on a pour tout $n \geq 0$ que $\sigma^n Q^- \neq Q^+$, alors f n'a pas d'autres pôles que 0 et ∞ (fixés par σ)

Pôles possibles

$$\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$$

$$f^{\iota_1} = f \text{ et } g^{\iota_2} = g$$

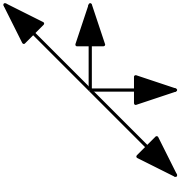
$$\mathcal{L}_f^- := \{P_1, P_2, \iota_2 P_3, \iota_2 P_4, 0, \infty\} \quad \mathcal{L}_f^+ := \{\iota_1 P_1, \iota_1 P_2, \sigma^{-1} P_3, \sigma^{-1} P_4, 0, \infty\}$$

Soit P un pôle de f différent de 0 ou ∞

$$Q^- \in \mathcal{L}_f^- \xleftarrow{\sigma^{-m}} P \xrightarrow{\sigma^n} Q^+ \in \mathcal{L}_f^+$$

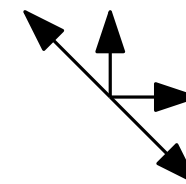
- Si pour tout $Q^- \in \mathcal{L}_f^-$ et $Q^+ \in \mathcal{L}_f^+$ on a pour tout $n \geq 0$ que $\sigma^n Q^- \neq Q^+$, alors f n'a pas d'autres pôles que 0 et ∞ (fixés par σ)
- Étant donnés $Q^- \in \mathcal{L}_f^-$ et $Q^+ \in \mathcal{L}_f^+$ et $n \in \mathbb{N}$, les conditions pour $\sigma^n Q^- = Q^+$ sont algébriques sur les paramètres $(d_p)_{p \in \mathcal{S}}, a, b$.

Un exemple



Un exemple

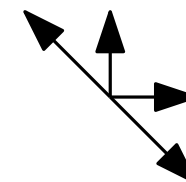
si $\sigma^n Q^- = Q^+$ on écrit n , sinon \perp



$\mathcal{L}_f^- \backslash \mathcal{L}_f^+$	$\iota_1 P_1$	$\iota_2 P_2$	$\sigma^{-1} P_3$	$\sigma^{-1} P_4$
P_1	\perp	$\begin{pmatrix} -1 & \text{si } a = 1 \\ \perp & \text{sinon} \end{pmatrix}$	-1	\perp
P_2		\perp	\perp	$\begin{pmatrix} 0 & \text{si } a + b = ab \\ -2 & \text{si } a = b = 1 \\ \perp & \text{sinon} \end{pmatrix}$
$\iota_2 P_3$			\perp	$\begin{pmatrix} -2 & \text{si } b = 1 \\ \perp & \text{sinon} \end{pmatrix}$
$\iota_2 P_4$				\perp

Un exemple

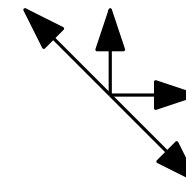
si $\sigma^n Q^- = Q^+$ on écrit n , sinon \perp



$\mathcal{L}_f^- \backslash \mathcal{L}_f^+$	$\iota_1 P_1$	$\iota_2 P_2$	$\sigma^{-1} P_3$	$\sigma^{-1} P_4$
P_1	\perp	$\begin{pmatrix} -1 & \text{si } a = 1 \\ \perp & \text{sinon} \end{pmatrix}$	-1	\perp
P_2		\perp	\perp	$\begin{pmatrix} 0 & \text{si } a + b = ab \\ -2 & \text{si } a = b = 1 \\ \perp & \text{sinon} \end{pmatrix}$
$\iota_2 P_3$			\perp	$\begin{pmatrix} -2 & \text{si } b = 1 \\ \perp & \text{sinon} \end{pmatrix}$
$\iota_2 P_4$				\perp

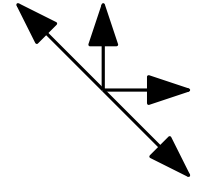
Un exemple

- Supposons que $a + b \neq ab$ et $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ D-algébrique



Un exemple

- Supposons que $a + b \neq ab$ et $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ D-algébrique
 - $\tilde{F}(s) = \tilde{f}(s) + \tilde{f}_h(s)$ et $\tilde{G}(s) = \tilde{g}(s) + \tilde{g}_h(s)$

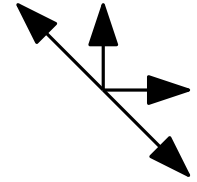


Un exemple

- Supposons que $a + b \neq ab$ et $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ D-algébrique

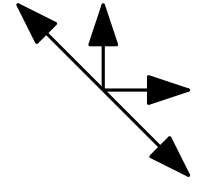
- $\tilde{F}(s) = \tilde{f}(s) + \tilde{f}_h(s)$ et $\tilde{G}(s) = \tilde{g}(s) + \tilde{g}_h(s)$

- on montre que si $a + b \neq ab$, les seuls pôles de \tilde{f} sont 0 et ∞
 $\Rightarrow \tilde{f}(s) = \mathbf{f}(x(s))$ où $\mathbf{f}(x) \in \mathbb{C}[\frac{1}{x}]$ (D)



Un exemple

- Supposons que $a + b \neq ab$ et $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ D-algébrique



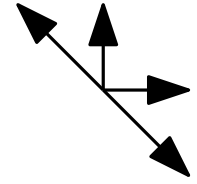
- $\tilde{F}(s) = \tilde{f}(s) + \tilde{f}_h(s)$ et $\tilde{G}(s) = \tilde{g}(s) + \tilde{g}_h(s)$

- on montre que si $a + b \neq ab$, les seuls pôles de \tilde{f} sont 0 et ∞ (D)
 $\Rightarrow \tilde{f}(s) = \mathbf{f}(x(s))$ où $\mathbf{f}(x) \in \mathbb{C}[\frac{1}{x}]$

- on montre que si $a + b \neq ab$, alors $\tilde{f}_h(s) = 0$ (D_h)

Un exemple

- Supposons que $a + b \neq ab$ et $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ D-algébrique



- $\tilde{F}(s) = \tilde{f}(s) + \tilde{f}_h(s)$ et $\tilde{G}(s) = \tilde{g}(s) + \tilde{g}_h(s)$

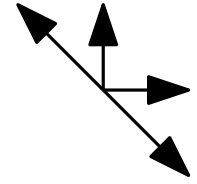
- on montre que si $a + b \neq ab$, les seuls pôles de \tilde{f} sont 0 et ∞ (D)
 $\Rightarrow \tilde{f}(s) = \mathbf{f}(x(s))$ où $\mathbf{f}(x) \in \mathbb{C}[\frac{1}{x}]$

- on montre que si $a + b \neq ab$, alors $\tilde{f}_h(s) = 0$ (D_h)

$$\Rightarrow \tilde{F}(s) = \tilde{f}(s) \Rightarrow x(s)Q(x(s), 0) = \mathbf{f}(x(s)) \Rightarrow xQ(x, 0) \in \mathbb{C}[\frac{1}{x}], \text{ absurde}$$

Un exemple

- Supposons que $a + b \neq ab$ et $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ D-algébrique



- $\tilde{F}(s) = \tilde{f}(s) + \tilde{f}_h(s)$ et $\tilde{G}(s) = \tilde{g}(s) + \tilde{g}_h(s)$

- on montre que si $a + b \neq ab$, les seuls pôles de \tilde{f} sont 0 et ∞ (D)
 $\Rightarrow \tilde{f}(s) = \mathbf{f}(x(s))$ où $\mathbf{f}(x) \in \mathbb{C}[\frac{1}{x}]$

- on montre que si $a + b \neq ab$, alors $\tilde{f}_h(s) = 0$ (D_h)

$$\Rightarrow \tilde{F}(s) = \tilde{f}(s) \Rightarrow x(s)Q(x(s), 0) = \mathbf{f}(x(s)) \Rightarrow xQ(x, 0) \in \mathbb{C}[\frac{1}{x}], \text{ absurde}$$

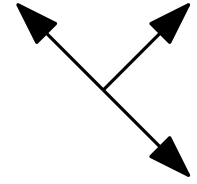
- Si $a + b = ab$, on trouve des solutions f et g de (D), on montre que (D_h) n'a pas de solution non nulle, et on trouve alors :

$$Q(x, 0) = \frac{1 - abd_{1,-1}d_{-1,1}t^2}{1 - abd_{1,-1}d_{-1,1}t^2 - ad_{1,0}xt - abd_{1,-1}d_{0,1}xt^2}$$

$$Q(0, y) = \frac{1 - abd_{1,-1}d_{-1,1}t^2}{1 - abd_{1,-1}d_{-1,1}t^2 - bd_{0,1}yt - abd_{-1,1}d_{1,0}yt^2}$$

Autre exemple

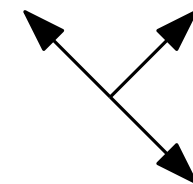
Cas $a = b = 2$



Autre exemple

Cas $a = b = 2$

- $\omega = 0$ donc $f = g = 0$ est solution de $\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$
avec $f^{\nu_1} = 0$ et $g^{\nu_2} = 0$



(D)

Autre exemple

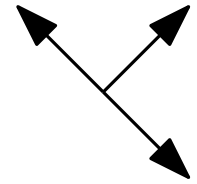
Cas $a = b = 2$

• $\omega = 0$ donc $f = g = 0$ est solution de $\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$
avec $f^{\nu_1} = 0$ et $g^{\nu_2} = 0$

(D)

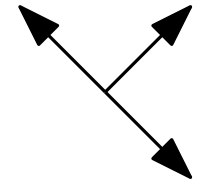
• on trouve f_h et g_h solutions de $\tilde{\gamma}_1 f_h + \tilde{\gamma}_2 g_h = 0$ avec
 $f_h^{\nu_1} = -f_h$ et $g_h^{\nu_2} = -g_h$. Il existe $\mathbf{f}_h(x(s)) = f_h(s)^2$ et
 $\mathbf{g}_h(y(s)) = g_h(s)^2$, \mathbf{f}_h et \mathbf{g}_h pas des carrés

(D_h)



Autre exemple

Cas $a = b = 2$



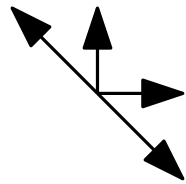
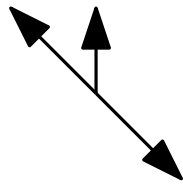
• $\omega = 0$ donc $f = g = 0$ est solution de $\tilde{\gamma}_1 f + \tilde{\gamma}_2 g + \omega = 0$ avec $f^{\nu_1} = 0$ et $g^{\nu_2} = 0$ (D)

• on trouve f_h et g_h solutions de $\tilde{\gamma}_1 f_h + \tilde{\gamma}_2 g_h = 0$ avec $f_h^{\nu_1} = -f_h$ et $g_h^{\nu_2} = -g_h$. Il existe $\mathbf{f}_h(x(s)) = f_h(s)^2$ et $\mathbf{g}_h(y(s)) = g_h(s)^2$, \mathbf{f}_h et \mathbf{g}_h pas des carrés (D_h)

• on en déduit $(x(s)Q(x(s), 0))^2 = (\tilde{F}(s))^2 = (f_h(s))^2 = \mathbf{f}_h(x(s))$

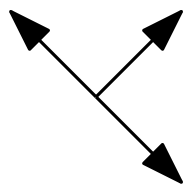
$$\Rightarrow xQ(x, 0) = \sqrt{\mathbf{f}_h(x)}$$

Les cas algébriques



$$a + b = ab$$

$$Q(x, 0) = \frac{1 - abd_{1,-1}d_{-1,1}t^2}{1 - abd_{1,-1}d_{-1,1}t^2 - ad_{1,0}xt - abd_{1,-1}d_{0,1}xt^2}$$
$$Q(0, y) = \frac{1 - abd_{1,-1}d_{-1,1}t^2}{1 - abd_{1,-1}d_{-1,1}t^2 - bd_{0,1}yt - abd_{-1,1}d_{1,0}yt^2}$$



$$a = b = 2$$

$$Q(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4d_{1,1}d_{1,-1}x^2t^2}{1 - 4d_{1,-1}d_{-1,1}t^2}}}$$
$$Q(0, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4d_{1,1}d_{-1,1}y^2t^2}{1 - 4d_{1,-1}d_{-1,1}t^2}}}$$

Perspectives

Perspectives

- Cas algébriques : preuves alternatives, asymptotique et transitions de phase des cas rationnels

Perspectives

- Cas algébriques : preuves alternatives, asymptotique et transitions de phase des cas rationnels
- montrer l'hypertranscendance en t

Perspectives

- Cas algébriques : preuves alternatives, asymptotique et transitions de phase des cas rationnels
- montrer l'hypertranscendance en t
- classifier les marches à bords interactifs de genre 1

Perspectives

- Cas algébriques : preuves alternatives, asymptotique et transitions de phase des cas rationnels
- montrer l'hypertranscendance en t
- classifier les marches à bords interactifs de genre 1

Merci de votre attention !