

Équations différentielles pour les séries génératrices de cartes avec contrôle des degrés de sommets, faces, et hyperarêtes

Houcine Ben Dali

Université de Lorraine, CNRS, IECL, France

Université de Paris Cité, CNRS, IRIF, France



Journées de Combinatoire de Bordeaux

5 Février 2024

Résultat principal:

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{C}_\ell^{(\alpha)}(-t, \mathbf{q}) + \mathcal{C}_\ell^{(\alpha)}(-t, \mathbf{r}) \right) \cdot G^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \\ & = \mathcal{C}_\ell^{(\alpha)\perp}(-t, \mathbf{p}) \cdot G^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}), \quad \text{pour } \ell \geq 0; \end{aligned}$$

$G^{(\alpha)}$ est une déformation des séries des hypercartes avec contrôle des degrés de sommets, faces et hyperarêtes;

- ▶ série d'hypercartes orientables pour $\alpha = 1$;
- ▶ série d'hypercartes orientables ou non pour $\alpha = 2$.

$\mathcal{C}_\ell^{(\alpha)}$ est un opérateur différentiel.

Résultat principal:

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{C}_\ell^{(\alpha)}(-t, \mathbf{q}) + \mathcal{C}_\ell^{(\alpha)}(-t, \mathbf{r}) \right) \cdot G^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \\ & = \mathcal{C}_\ell^{(\alpha)\perp}(-t, \mathbf{p}) \cdot G^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}), \quad \text{pour } \ell \geq 0; \end{aligned}$$

$G^{(\alpha)}$ est une déformation des séries des hypercartes avec contrôle des degrés de sommets, faces et hyperarêtes;

- ▶ série d'hypercartes orientables pour $\alpha = 1$;
- ▶ série d'hypercartes orientables ou non pour $\alpha = 2$.

$\mathcal{C}_\ell^{(\alpha)}$ est un opérateur différentiel.

Preuve:

- Algébrique pour tout α : caractères de Jack.
- Preuve combinatoire pour $\alpha = 1$: cartes orientables.

Résultat principal:

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{C}_\ell^{(\alpha)}(-t, \mathbf{q}) + \mathcal{C}_\ell^{(\alpha)}(-t, \mathbf{r}) \right) \cdot G^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \\ & \quad = \mathcal{C}_\ell^{(\alpha)\perp}(-t, \mathbf{p}) \cdot G^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}), \quad \text{pour } \ell \geq 0; \end{aligned}$$

$G^{(\alpha)}$ est une déformation des séries des **hypercartes**

- ▶ série d'hypercartes orientables pour $\alpha = 1$;
- ▶ série d'hypercartes orientables ou non pour $\alpha = 2$.

$\mathcal{C}_\ell^{(\alpha)}$ est un opérateur différentiel.

Preuve:

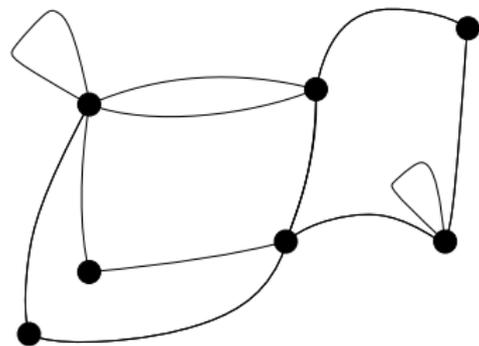
- Algébrique pour tout α : caractères de Jack.
- Preuve combinatoire pour $\alpha = 1$: cartes orientables.

Hypercartes

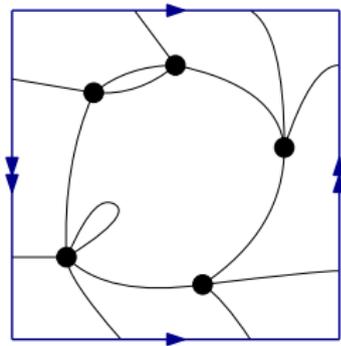
- Une *carte connexe* est la donnée d'un plongement cellulaire d'un graphe connexe dans une surface connexe compacte sans bord **orientable ou pas**, considérée à homéomorphisme près.

Hypercartes

- Une *carte connexe* est la donnée d'un plongement cellulaire d'un graphe connexe dans une surface connexe compacte sans bord **orientable ou pas**, considérée à homéomorphisme près.



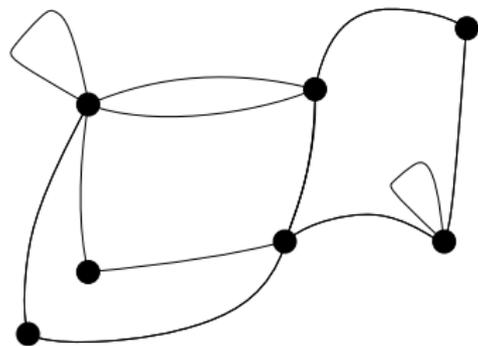
Une carte orientable planeaire



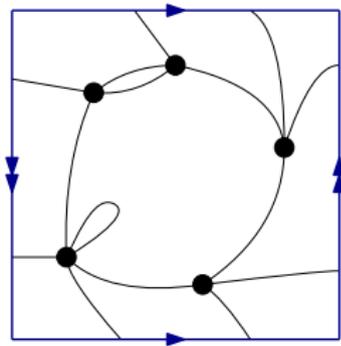
Une carte non-orientable sur la bouteille de Klein

Hypercartes

- Une *carte connexe* est la donnée d'un plongement cellulaire d'un graphe connexe dans une surface connexe compacte sans bord **orientable ou pas**, considérée à homéomorphisme près.
- Une *carte* est une collection de cartes connexes.



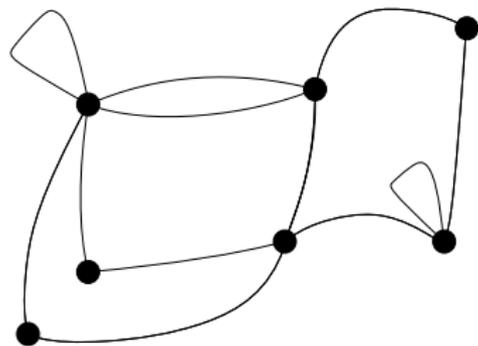
Une carte orientable planeaire



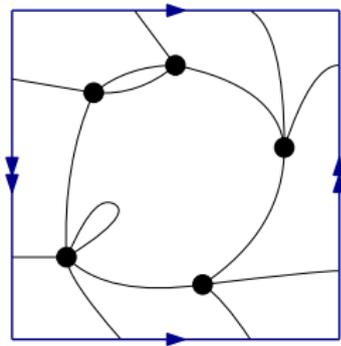
Une carte non-orientable sur la bouteille de Klein

Hypercartes

- Une *carte connexe* est la donnée d'un plongement cellulaire d'un graphe connexe dans une surface connexe compacte sans bord **orientable ou pas**, considérée à homéomorphisme près.
- Une carte est une collection de cartes connexes.
- On dit que la carte est **orientable** si toutes ses composantes connexes sont plongées sur des surfaces orientables.



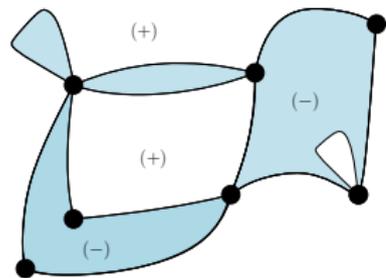
Une carte orientable plane



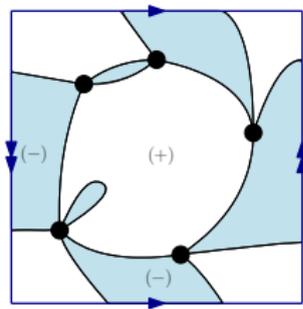
Une carte non-orientable sur la bouteille de Klein

Hypercartes

- Une *carte connexe* est la donnée d'un plongement cellulaire d'un graphe connexe dans une surface connexe compacte sans bord **orientable ou pas**, considérée à homéomorphisme près.
- Une carte est une collection de cartes connexes.
- On dit que la carte est **orientable** si toutes ses composantes connexes sont plongées sur des surfaces orientables.
- Une hypercarte est une carte dont les faces sont coloriées en deux couleurs (+) et (-) telle que toute arête sépare deux faces de couleurs différentes.



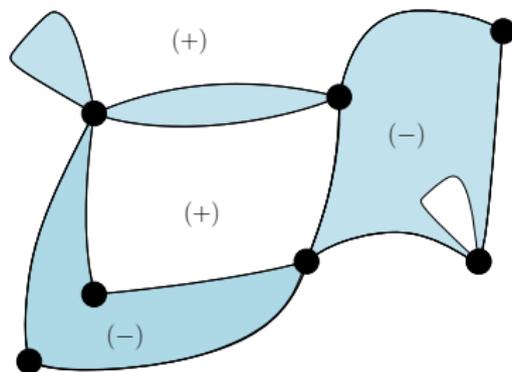
Une hypercarte orientable



Une hypercarte non-orientable

Cartes

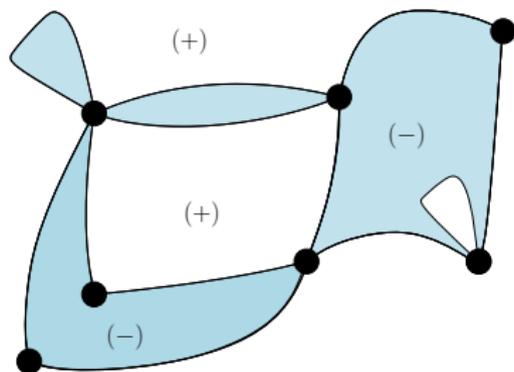
- La **taille** d'une hypercarte M est le nombre de ses arêtes, et sera noté $|M|$.



$$|M| = 12$$

Cartes

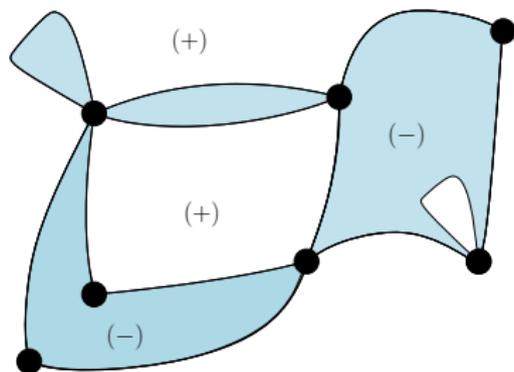
- La **taille** d'une hypercarte M est le nombre de ses arêtes, et sera noté $|M|$.
- Une partition $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell]$ d'un entier n est une suite d'entier $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell$ telle que $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\ell = n$.



$$|M| = 12$$

Cartes

- La **taille** d'une hypercarte M est le nombre de ses arêtes, et sera noté $|M|$.
- Une partition $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell]$ d'un entier n est une suite d'entier $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell$ telle que $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\ell = n$.
- On associe à une carte M trois partitions de taille $|M|$.

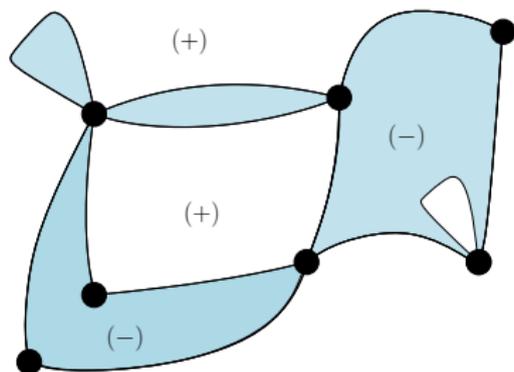


$$|M| = 12$$

Cartes

- La **taille** d'une hypercarte M est le nombre de ses arêtes, et sera noté $|M|$.
- Une partition $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell]$ d'un entier n est une suite d'entier $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell$ telle que $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\ell = n$.
- On associe à une carte M trois partitions de taille $|M|$.

Le **partition des sommets** d'une carte bipartie M , noté $\lambda^\bullet(M)$, est la partition obtenue en divisant les degrés des sommets de M par 2.

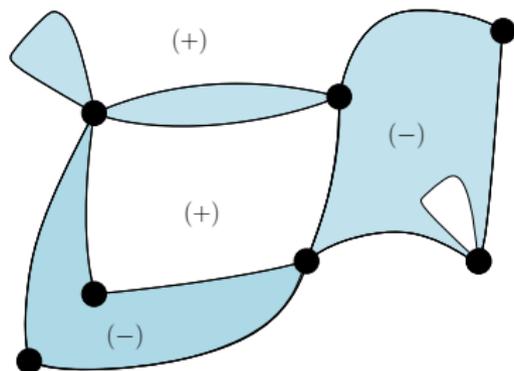


$$|M| = 12, \quad \lambda^\bullet(M) = [3, 2, 2, 2, 1, 1, 1]$$

Cartes

- La **taille** d'une hypercarte M est le nombre de ses arêtes, et sera noté $|M|$.
- Une partition $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell]$ d'un entier n est une suite d'entier $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell$ telle que $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\ell = n$.
- On associe à une carte M trois partitions de taille $|M|$.

Le **partition des faces (+)** d'une hypercarte, noté $\lambda^+(M)$, est la partition obtenue par les degrés des faces coloriées (+) de M .

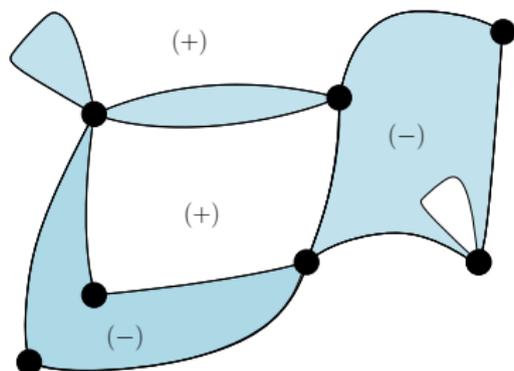


$$|M| = 12, \quad \lambda^\bullet(M) = [3, 2, 2, 2, 1, 1, 1], \quad \lambda^+(M) = [7, 4, 1],$$

Cartes

- La **taille** d'une hypercarte M est le nombre de ses arêtes, et sera noté $|M|$.
- Une partition $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell]$ d'un entier n est une suite d'entier $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell$ telle que $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\ell = n$.
- On associe à une carte M trois partitions de taille $|M|$.

Le **partition des faces** $(-)$ d'une hypercarte, noté $\lambda^-(M)$, est la partition obtenue par les degrés des faces coloriées $(-)$ de M .



$$|M| = 12, \quad \lambda^\bullet(M) = [3, 2, 2, 2, 1, 1, 1], \quad \lambda^+(M) = [7, 4, 1], \\ \lambda^-(M) = [5, 4, 2, 1].$$

Cartes

- La **taille** d'une hypercarte M est le nombre de ses arêtes, et sera noté $|M|$.
- Une partition $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell]$ d'un entier n est une suite d'entier $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell$ telle que $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\ell = n$.
- On associe à une carte M trois partitions de taille $|M|$.
- Le triplet de partitions $(\lambda^\bullet(M), \lambda^+(M), \lambda^-(M))$ s'appelle **le profil** de M .

Poids d'une hypercarte

- On considère une variable t , et trois alphabets $\mathbf{p} := (p_1, p_2, \dots)$, $\mathbf{q} := (q_1, q_2, \dots)$ et $\mathbf{r} := (r_1, r_2, \dots)$. Si $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_\ell]$ est une partition, alors

$$p_\lambda := p_{\lambda_1} \cdots p_{\lambda_\ell}.$$

Poids d'une hypercarte

- On considère une variable t , et trois alphabets $\mathbf{p} := (p_1, p_2, \dots)$, $\mathbf{q} := (q_1, q_2, \dots)$ et $\mathbf{r} := (r_1, r_2, \dots)$. Si $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_\ell]$ est une partition, alors

$$p_\lambda := p_{\lambda_1} \cdots p_{\lambda_\ell}.$$

- on associe
 - ▶ à une arête un poids t .
 - ▶ à un sommet de degré $2i$ un poids p_i .
 - ▶ à une face (+) degré i un poids q_i .
 - ▶ à une face (-) de degré i un poids r_i .

Poids d'une hypercarte

- On considère une variable t , et trois alphabets $\mathbf{p} := (p_1, p_2, \dots)$, $\mathbf{q} := (q_1, q_2, \dots)$ et $\mathbf{r} := (r_1, r_2, \dots)$. Si $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_\ell]$ est une partition, alors

$$p_\lambda := p_{\lambda_1} \cdots p_{\lambda_\ell}.$$

- on associe
 - ▶ à une arête un poids t .
 - ▶ à un sommet de degré $2i$ un poids p_i .
 - ▶ à une face (+) degré i un poids q_i .
 - ▶ à une face (-) de degré i un poids r_i .
- Une carte M a un poids $t^{|M|} p_{\lambda^\bullet(M)} q_{\lambda^+(M)} r_{\lambda^-(M)}$.

Séries génératrices

$$H^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \sum_{\substack{\text{Hypercartes } M \\ \text{orientables}}} \frac{1}{z_{\lambda^\bullet(M)}} t^{|M|} p_{\lambda^\bullet(M)} q_{\lambda^+(M)} r_{\lambda^-(M)},$$

$$H^{(2)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \sum_{\substack{\text{Hypercartes } M \\ \text{orientables ou non}}} \frac{1}{2^{\ell(\lambda^\bullet(M))} z_{\lambda^\bullet(M)}} t^{|M|} p_{\lambda^\bullet(M)} q_{\lambda^+(M)} r_{\lambda^-(M)}.$$

Remarque

Afin d'énumérer des cartes avec des groupes d'automorphismes triviaux, toutes les cartes sont étiquetées.

Équations différentielles pour des spécialisations de $H^{(i)}$, pour $i \in \{1, 2\}$

On considère la spécialisation $H^{(i)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, u)$ où on garde deux alphabets \mathbf{p} et \mathbf{q} et on remplace $r_j = u$ pour tout $j \geq 1$. Cela correspond au poids

$$t^{|M|} p_{\lambda^\bullet(M)} q_{\lambda^+(M)} u^{|\text{faces}(-) \text{ de } M|}.$$

Équations différentielles pour des spécialisations de $H^{(i)}$, pour $i \in \{1, 2\}$

On considère la spécialisation $H^{(i)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, u)$ où on garde deux alphabets \mathbf{p} et \mathbf{q} et on remplace $r_j = u$ pour tout $j \geq 1$. Cela correspond au poids

$$t^{|M|} p_{\lambda^\bullet(M)} q_{\lambda^+(M)} u^{|\text{faces}(-) \text{ de } M|}.$$

- Équations de la hiérarchie KP pour $H^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, u)$ et la hiérarchie BKP pour $H^{(2)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, u)$.

Équations différentielles pour des spécialisations de $H^{(i)}$, pour $i \in \{1, 2\}$

On considère la spécialisation $H^{(i)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, u)$ où on garde deux alphabets \mathbf{p} et \mathbf{q} et on remplace $r_j = u$ pour tout $j \geq 1$. Cela correspond au poids

$$t^{|M|} p_{\lambda \bullet (M)} q_{\lambda + (M)} u^{|\text{faces } (-) \text{ de } M|}.$$

- Équations de la hiérarchie KP pour $H^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, u)$ et la hiérarchie BKP pour $H^{(2)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, u)$.
- Chapuy-Dolega '22 : Une équation de Tutte pour une déformation $H^{(\alpha)}$ liée à l'énumération de cartes avec poids de non-orientabilité.

$$\frac{n \partial}{\partial q_n} \cdot H^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, u) = t^n \mathcal{B}_n^{(\alpha)}(\mathbf{p}, u) \cdot H^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, u).$$

Équations différentielles pour des spécialisations de $H^{(i)}$, pour $i \in \{1, 2\}$

On considère la spécialisation $H^{(i)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, u)$ où on garde deux alphabets \mathbf{p} et \mathbf{q} et on remplace $r_j = u$ pour tout $j \geq 1$. Cela correspond au poids

$$t^{|M|} p_{\lambda^+(M)} q_{\lambda^-(M)} u^{|\text{faces}(-) \text{ de } M|}.$$

- Équations de la hiérarchie KP pour $H^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, u)$ et la hiérarchie BKP pour $H^{(2)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, u)$.
- Chapuy-Dolega '22 : Une équation de Tutte pour une déformation $H^{(\alpha)}$ liée à l'énumération de cartes avec poids de non-orientabilité.

$$\frac{n\partial}{\partial q_n} \cdot H^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, u) = t^n \mathcal{B}_n^{(\alpha)}(\mathbf{p}, u) \cdot H^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, u).$$

- Les séries $H^{(i)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$ s'expriment avec des séries de fonctions symétriques.

Équations différentielles pour des spécialisations de $H^{(i)}$, pour $i \in \{1, 2\}$

On considère la spécialisation $H^{(i)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, u)$ où on garde deux alphabets \mathbf{p} et \mathbf{q} et on remplace $r_j = u$ pour tout $j \geq 1$. Cela correspond au poids

$$t^{|M|} p_{\lambda^{\bullet}(M)} q_{\lambda^+(M)} u^{|\text{faces}(-) \text{ de } M|}.$$

- Équations de la hiérarchie KP pour $H^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, u)$ et la hiérarchie BKP pour $H^{(2)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, u)$.
- Chapuy-Dolega '22 : Une équation de Tutte pour une déformation $H^{(\alpha)}$ liée à l'énumération de cartes avec poids de non-orientabilité.

$$\frac{n\partial}{\partial q_n} \cdot H^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, u) = t^n \mathcal{B}_n^{(\alpha)}(\mathbf{p}, u) \cdot H^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, u).$$

- Les séries $H^{(i)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$ s'expriment avec des séries de fonctions symétriques.

Problème: Est-ce que les séries $H^{(i)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$ satisfont des équations différentielles similaires?

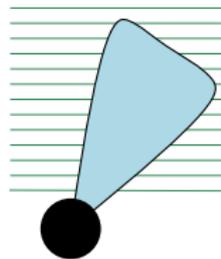
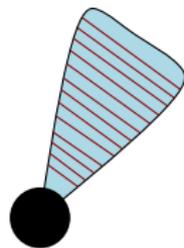
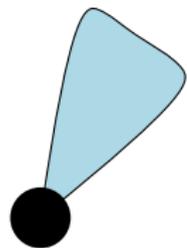
Hypercartes à bulles marquées

On considère des hypercartes avec certaines **bulles** (faces de degré 1) marquées, avec la condition qu'on ne marque pas les deux faces d'une bulle isolée.

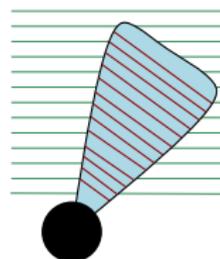
Hypercartes à bulles marquées

On considère des hypercartes avec certaines **bulles** (faces de degré 1) marquées, avec la condition qu'on ne marque pas les deux faces d'une bulle isolée.

Marquages possibles d'une bulle isolée



Marquage interdit d'une bulle isolée



→ Toute arête est incidente à au plus une bulle marquée.

Hypercartes à bulles marquées

On considère des hypercartes avec certaines **bulles** (faces de degré 1) marquées, avec la condition qu'on ne marque pas les deux faces d'une bulle isolée.

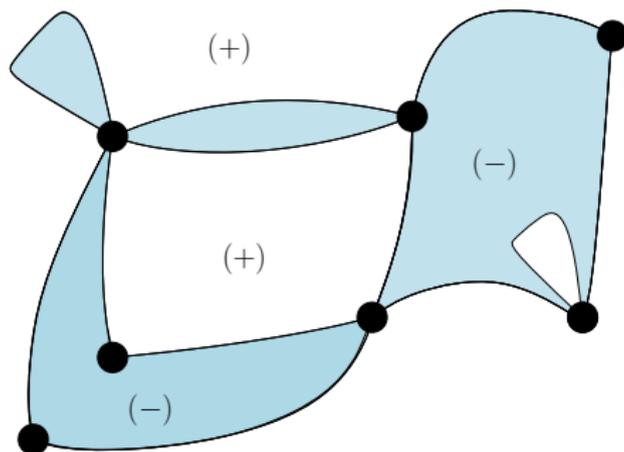


Figure 2: Une hypercarte de profil $([3, 2, 2, 2, 1, 1, 1], [7, 4, 1], [5, 4, 2, 1])$

Hypercartes à bulles marquées

On considère des hypercartes avec certaines **bulles** (faces de degré 1) marquées, avec la condition qu'on ne marque pas les deux faces d'une bulle isolée.

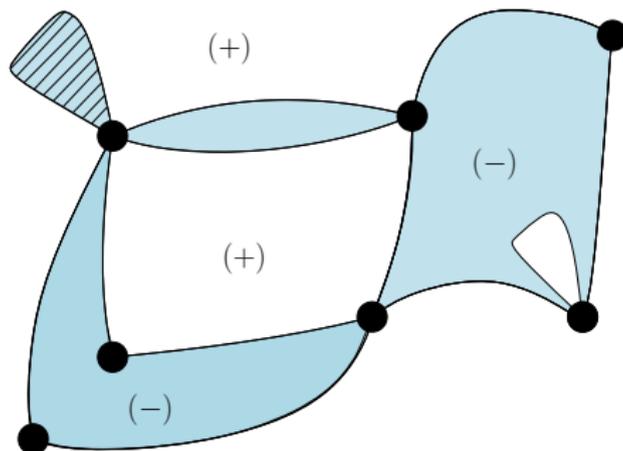


Figure 2: Une hypercarte de profil $([3, 2, 2, 2, 1, 1, 1], [7, 4, 1], [5, 4, 2, \cancel{1}])$

Hypercartes à bulles marquées

On considère des hypercartes avec certaines **bulles** (faces de degré 1) marquées, avec la condition qu'on ne marque pas les deux faces d'une bulle isolée.

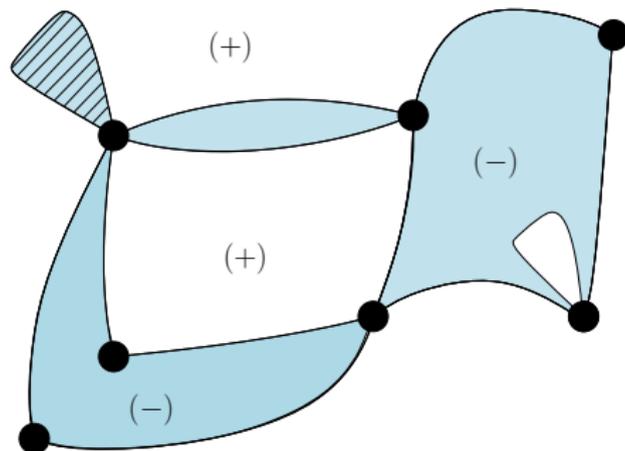


Figure 2: Une hypercarte de profil $([3, 2, 2, 2, 1, 1, 1], [7, 4, 1], [5, 4, 2, \cancel{1}])$

La taille d'une hypercarte à face marquée est

$|M| := |\lambda^+(M)| + |\lambda^-(M)| - |\lambda^\bullet(M)|$ est le nombre d'arêtes de M qui ne sont pas incidentes à une bulle marquée.

Séries génératrices

On associe aux hypercartes avec des bulles marquées la série génératrices

$$\tilde{H}^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) := \sum_{\substack{\text{Hypercartes à BM } M \\ \text{orientables}}} \frac{1}{z_{\lambda^\bullet(M)}} t^{|\lambda^\bullet(M)|} p_{\lambda^\bullet(M)} q_{\lambda^+(M)} r_{\lambda^-(M)}.$$

Liée à la série d'hypercartes orientables par

$$\exp\left(\frac{p_1}{t}\right) \tilde{H}^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \exp\left(\frac{\partial}{t\partial q_1}\right) \exp\left(\frac{\partial}{t\partial r_1}\right) H^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}),$$

Séries génératrices

On associe aux hypercartes avec des bulles marquées la séries génératrices

$$\tilde{H}^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) := \sum_{\substack{\text{Hypercartes à BM } M \\ \text{orientables}}} \frac{1}{z_{\lambda^\bullet(M)}} t^{|\lambda^\bullet(M)|} p_{\lambda^\bullet(M)} q_{\lambda^+(M)} r_{\lambda^-(M)}.$$

Liée à la séries d'hypercartes orientables par

$$\exp\left(\frac{p_1}{t}\right) \tilde{H}^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \exp\left(\frac{\partial}{t\partial q_1}\right) \exp\left(\frac{\partial}{t\partial r_1}\right) H^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}),$$

On définit de même la série des hypercartes orientables ou non avec des bulles marquées $\tilde{H}^{(2)}$.

Résultat principal:

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{C}_\ell^{(\alpha)}(-t, \mathbf{q}) + \mathcal{C}_\ell^{(\alpha)}(-t, \mathbf{r}) \right) \cdot G^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \\ & = \mathcal{C}_\ell^{(\alpha)\perp}(-t, \mathbf{p}) \cdot G^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}), \quad \text{pour } \ell \geq 0; \end{aligned}$$

$G^{(\alpha)}$ est une déformation des séries des hypercartes

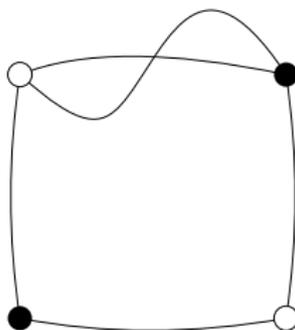
- ▶ $G^{(1)} = \tilde{H}^{(1)}$ série d'hypercartes orientables avec des bulles marquées, avec des bulles marquées pour $\alpha = 1$;
- ▶ $G^{(2)} = \tilde{H}^{(2)}$ série d'hypercartes avec des bulles marquées, orientables ou non, pour $\alpha = 2$.

$\mathcal{C}_\ell^{(\alpha)}$ est un opérateur différentiel.

Cartes biparties

Une carte **bipartie** est une carte dont les sommets sont coloriés en noir et blanc et toute arête lie deux sommets de couleurs différentes (duales des hypercartes).

Exemple : Une carte bipartie orientable



On associe à une carte bipartie M une partition des faces $\lambda^\diamond(M)$, et un poids $t^{|M|} p_{\lambda^\diamond(M)}$.

Opérateurs différentiels et construction de cartes

On fixe une carte bipartie orientable M .

$$\left(\sum_{i \geq 1} p_{i+1} \frac{i \partial}{\partial p_i} \right) \frac{t^{|M|} p_{\lambda^\diamond(M)}}{|M|!} = \sum_N t^{|N|} \frac{p_{\lambda^\diamond(N)}}{|N|!}$$

où la somme est prise sur toutes les cartes bipartie N obtenues à partir de M en ajoutant une feuille noire.

Opérateurs différentiels et construction de cartes

On fixe une carte bipartie orientable M .

$$\left(\sum_{i \geq 1} p_{i+1} \frac{i \partial}{\partial p_i} \right) \frac{t^{|M|} p_{\lambda^\diamond(M)}}{|M|!} = \sum_N t^{|N|} \frac{p_{\lambda^\diamond(N)}}{|N|!}$$

où la somme est prise sur toutes les cartes bipartie N obtenues à partir de M en ajoutant une feuille noire.

$$\left(\sum_{i,j \geq 1} p_{i+1} \frac{i \partial}{\partial p_i} \frac{j \partial}{\partial p_j} + \sum_{i,j \geq 1} p_i p_j \frac{(i+j-1) \partial}{\partial p_{i+j-1}} \right) \frac{t^{|M|} p_{\lambda^\diamond(M)}}{|M|!} = \sum_N t^{|N|} \frac{p_{\lambda^\diamond(N)}}{|N|!}$$

où la somme est prise sur toutes les cartes bipartie N obtenues à partir de M en ajoutant une arête entre deux coins de la carte.

Opérateurs différentiels [Chapuy–Dołęga '22]

On fixe une carte bipartie M .

$$\mathcal{C}_\ell^{(1)}(t, \mathbf{p}) \cdot \frac{t^{|M|} p_{\lambda^\diamond(M)}}{|M|!} = \sum_N t^{|N|} \frac{p_{\lambda^\diamond(N)}}{|N|!},$$

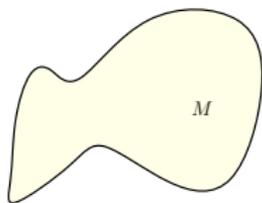
où la somme et prise sur toutes les cartes biparties N obtenues à partir de M en ajoutant un sommet noir v auquel sont attachés ℓ nouveaux sommets blancs w_1, \dots, w_ℓ .

Opérateurs différentiels [Chapuy–Dołęga '22]

On fixe une carte bipartie M .

$$\mathcal{C}_\ell^{(1)}(t, \mathbf{p}) \cdot \frac{t^{|M|} p_{\lambda^\diamond(M)}}{|M|!} = \sum_N t^{|N|} \frac{p_{\lambda^\diamond(N)}}{|N|!},$$

où la somme est prise sur toutes les cartes biparties N obtenues à partir de M en ajoutant un sommet noir v auquel sont attachés ℓ nouveaux sommets blancs w_1, \dots, w_ℓ .

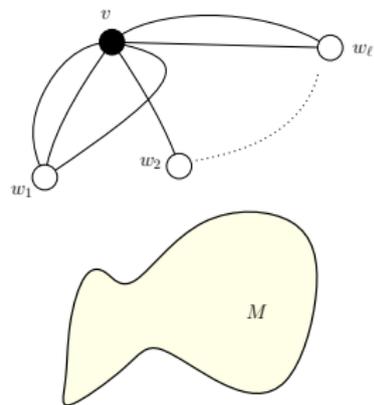


Opérateurs différentiels [Chapuy–Dołęga '22]

On fixe une carte bipartie M .

$$\mathcal{C}_\ell^{(1)}(t, \mathbf{p}) \cdot \frac{t^{|M|} p_{\lambda^\diamond(M)}}{|M|!} = \sum_N t^{|N|} \frac{p_{\lambda^\diamond(N)}}{|N|!},$$

où la somme est prise sur toutes les cartes biparties N obtenues à partir de M en ajoutant un sommet noir v auquel sont attachés ℓ nouveaux sommets blancs w_1, \dots, w_ℓ .

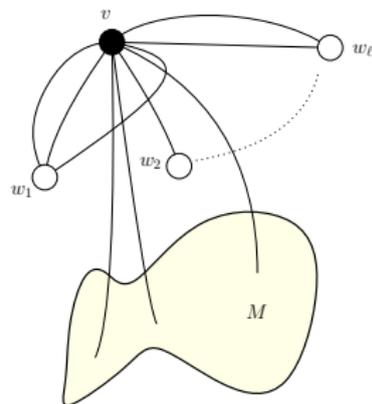


Opérateurs différentiels [Chapuy–Dołęga '22]

On fixe une carte bipartie M .

$$\mathcal{C}_\ell^{(1)}(t, \mathbf{p}) \cdot \frac{t^{|M|} p_{\lambda^\diamond(M)}}{|M|!} = \sum_N t^{|N|} \frac{p_{\lambda^\diamond(N)}}{|N|!},$$

où la somme est prise sur toutes les cartes biparties N obtenues à partir de M en ajoutant un sommet noir v auquel sont attachés ℓ nouveaux sommets blancs w_1, \dots, w_ℓ .

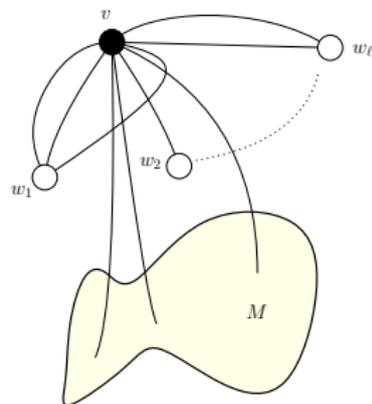


Opérateurs différentiels [Chapuy–Dołęga '22]

On fixe une carte bipartie M .

$$\mathcal{C}_\ell^{(1)}(t, \mathbf{p}) \cdot \frac{t^{|M|} p_{\lambda^\diamond(M)}}{|M|!} = \sum_N t^{|N|} \frac{p_{\lambda^\diamond(N)}}{|N|!},$$

où la somme est prise sur toutes les cartes biparties N obtenues à partir de M en ajoutant un sommet noir v auquel sont attachés ℓ nouveaux sommets blancs w_1, \dots, w_ℓ .



→ Ces opérateurs ont une expression différentielle.

Opérateurs différentiels [Chapuy–Dołęga '22]

$$\mathcal{C}_{\ell,k}^{(\alpha)}(\mathbf{p}) := [u^\ell] \Theta_Y (\Gamma_Y + uY_+)^{\ell+k} \frac{y_0}{1+b}$$

et

$$\mathcal{C}_\ell^{(\alpha)}(\mathbf{p}) := \sum_{k \geq 0} \frac{t^{\ell+k}}{\ell+k} \mathcal{C}_{\ell,k}^{(\alpha)}, \text{ pour } \ell \geq 1.$$

où $b := \alpha - 1$,

$Y := (y_0, y_1, y_2, \dots)$ est un alphabet catalytique,

$$Y_+ = \sum_{i \geq 0} y_{i+1} \frac{\partial}{\partial y_i},$$

$$\Gamma_Y = (1+b) \cdot \sum_{i,j \geq 1} y_{i+j} \frac{i \partial^2}{\partial p_i \partial y_{j-1}} + \sum_{i,j \geq 1} y_i p_j \frac{\partial}{\partial y_{i+j-1}} + b \cdot \sum_{i \geq 1} y_{i+1} \frac{i \partial}{\partial y_i},$$

$$\Theta_Y := \sum_{i \geq 1} p_i \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Résultat principal:

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{C}_\ell^{(\alpha)}(-t, \mathbf{q}) + \mathcal{C}_\ell^{(\alpha)}(-t, \mathbf{r}) \right) \cdot G^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \\ &= \mathcal{C}_\ell^{(\alpha)\perp}(-t, \mathbf{p}) \cdot G^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}), \quad \text{pour } \ell \geq 0; \end{aligned}$$

$G^{(\alpha)}$ est une **déformation** des séries des hypercartes

- ▶ $G^{(1)} = \tilde{H}^{(1)}$ série d'hypercartes orientables avec des bulles marquées, avec des bulles marquées pour $\alpha = 1$;
- ▶ $G^{(2)} = \tilde{H}^{(2)}$ série d'hypercartes avec des bulles marquées, orientables ou non, pour $\alpha = 2$.

$\mathcal{C}_\ell^{(\alpha)}$ est un opérateur différentiel.

Caractères de Jack $\theta_{\mu}^{(\alpha)}(\lambda)$

- Donnent les coefficients des fonctions sommes de puissances dans les polynômes de Jack $J_{\lambda}^{(\alpha)}$.

Caractères de Jack $\theta_{\mu}^{(\alpha)}(\lambda)$

- Donnent les coefficients des fonctions sommes de puissances dans les polynômes de Jack $J_{\lambda}^{(\alpha)}$.
- Sont une déformation des caractères du groupe symétrique.

Caractères de Jack $\theta_{\mu}^{(\alpha)}(\lambda)$

- Donnent les coefficients des fonctions sommes de puissances dans les polynômes de Jack $J_{\lambda}^{(\alpha)}$.
- Sont une déformation des caractères du groupe symétrique.
- Forment une base des fonctions symétriques décalées.

Caractères de Jack $\theta_\mu^{(\alpha)}(\lambda)$

- Donnent les coefficients des fonctions sommes de puissances dans les **polynômes de Jack** $J_\lambda^{(\alpha)}$.
- Sont une déformation des caractères du groupe symétrique.
- Forment une base des fonctions symétriques décalées.
- Comptent des cartes biparties à **niveaux** avec des poids non-orientabilité.

Théorème (B.D–Dołęga '23)

Pour $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_k]$

$$\theta_\mu^{(\alpha)}(\lambda) = [t^{|\mu|} p_\mu] \exp\left(\mathcal{C}_\infty^{(\alpha)}(-t, \mathbf{p}, -\alpha\lambda_1)\right) \cdots \exp\left(\mathcal{C}_\infty^{(\alpha)}(-t, \mathbf{p}, -\alpha\lambda_k)\right) \cdot 1,$$

où $\mathcal{C}_\infty^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, u) = \sum_{\ell \geq 0} u^\ell \mathcal{C}_\ell^{(\alpha)}(t, \mathbf{p})$.

Pour $\alpha = 1$, cela correspond à la formule de Stanley–Féray '10 pour les caractères de groupe symétriques.

Coefficients de structures

$$\theta_{\mu}^{(\alpha)} \cdot \theta_{\nu}^{(\alpha)} = \sum_{\pi} g_{\mu, \nu}^{\pi}(\alpha) \theta_{\pi}^{(\alpha)}.$$

Coefficients de structures

$$\theta_{\mu}^{(\alpha)} \cdot \theta_{\nu}^{(\alpha)} = \sum_{\pi} g_{\mu, \nu}^{\pi}(\alpha) \theta_{\pi}^{(\alpha)}.$$

Théorème

$g_{\mu, \nu}^{\pi}(1)$ est le nombre des hypercartes *orientables* à bulles marquées de profil (π, μ, ν) .

$g_{\mu, \nu}^{\pi}(2)$ est le nombre des hypercartes *orientables ou non*, à bulles marquées de profil (π, μ, ν) .

Goulden–Jackson '96+Dołęga–Féray '16+ Définition des hypercartes à bulles marquées.

Coefficients de structures

$$\theta_\mu^{(\alpha)} \cdot \theta_\nu^{(\alpha)} = \sum_{\pi} g_{\mu,\nu}^{\pi}(\alpha) \theta_\pi^{(\alpha)}.$$

Théorème

$g_{\mu,\nu}^{\pi}(1)$ est le nombre des hypercartes *orientables* à bulles marquées de profil (π, μ, ν) .

$g_{\mu,\nu}^{\pi}(2)$ est le nombre des hypercartes *orientables ou non*, à bulles marquées de profil (π, μ, ν) .

On introduit la série

$$G^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) := \sum_{\pi, \mu, \nu} t^{|\mu|+|\nu|-|\pi|} \frac{g_{\mu,\nu}^{\pi}(\alpha)}{z_\pi \alpha^{\ell(\pi)}} p_\pi q_\mu r_\nu.$$

$$\longrightarrow G^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \tilde{H}^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \quad \text{pour } \alpha \in \{1, 2\}.$$

Théorème (B.D. '24)

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{C}_\ell^{(\alpha)}(-t, \mathbf{q}) + \mathcal{C}_\ell^{(\alpha)}(-t, \mathbf{r}) \right) \cdot G^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \\ & \qquad \qquad \qquad = \mathcal{C}_\ell^{(\alpha)\perp}(-t, \mathbf{p}) \cdot G^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}), \quad \text{pour } \ell \geq 0. \end{aligned}$$

où $\mathcal{C}_\ell^{(\alpha)\perp}$ est le dual de $\mathcal{C}_\ell^{(\alpha)}$ par rapport au produit scalaire

$$\langle p_\mu, p_\nu \rangle_\alpha = \delta_{\mu, \nu} z_\mu \alpha^{\ell(\mu)}.$$

Théorème (B.D. '24)

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{C}_\ell^{(\alpha)}(-t, \mathbf{q}) + \mathcal{C}_\ell^{(\alpha)}(-t, \mathbf{r}) \right) \cdot G^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \\ = \mathcal{C}_\ell^{(\alpha)\perp}(-t, \mathbf{p}) \cdot G^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}), \quad \text{pour } \ell \geq 0. \end{aligned}$$

où $\mathcal{C}_\ell^{(\alpha)\perp}$ est le dual de $\mathcal{C}_\ell^{(\alpha)}$ par rapport au produit scalaire

$$\langle p_\mu, p_\nu \rangle_\alpha = \delta_{\mu, \nu} z_\mu \alpha^{\ell(\mu)}.$$

Preuve : On utilise $\theta_\mu^{(\alpha)} \cdot \theta_\nu^{(\alpha)} = \sum_\pi g_{\mu, \nu}^\pi(\alpha) \theta_\pi^{(\alpha)}$.

et

$$\theta_\mu^{(\alpha)}(\lambda) = [t^{|\mu|} p_\mu] \exp \left(\mathcal{C}_\infty^{(\alpha)}(-t, \mathbf{p}, -\alpha \lambda_1) \right) \cdots \exp \left(\mathcal{C}_\infty^{(\alpha)}(-t, \mathbf{p}, -\alpha \lambda_k) \right) \cdot 1,$$

où $\mathcal{C}_\infty^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, u) = \sum_{\ell \geq 0} u^\ell \mathcal{C}_\ell^{(\alpha)}(t, \mathbf{p})$.

Relations de commutations

$$G^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) := \sum_{\pi, \mu, \nu} t^{|\mu|+|\nu|-|\pi|} \frac{g_{\mu, \nu}^{\pi}(\alpha)}{z_{\pi} \alpha^{\ell(\pi)}} p_{\pi} q_{\mu} r_{\nu}.$$

On introduit

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) : \mathbb{Q}(\alpha)[\mathbf{p}] &\longrightarrow \mathbb{Q}(\alpha)[\mathbf{q}, \mathbf{r}][[t]] \\ p_{\pi} &\longmapsto \sum_{\mu, \nu} t^{|\mu|+|\nu|-|\lambda|} g_{\mu, \nu}^{\pi}(\alpha) q_{\mu} r_{\nu}. \end{aligned}$$

Relations de commutations

$$G^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) := \sum_{\pi, \mu, \nu} t^{|\mu|+|\nu|-|\pi|} \frac{g_{\mu, \nu}^{\pi}(\alpha)}{z_{\pi} \alpha^{\ell(\pi)}} p_{\pi} q_{\mu} r_{\nu}.$$

On introduit

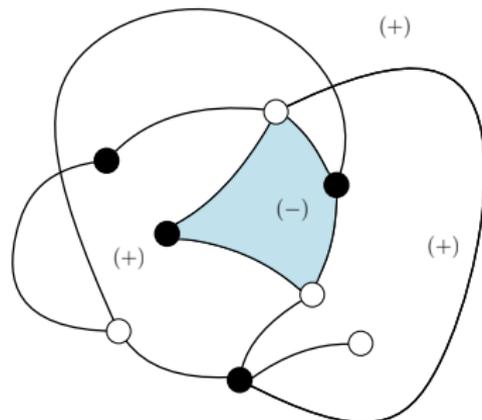
$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) : \quad \mathbb{Q}(\alpha)[\mathbf{p}] &\longrightarrow \mathbb{Q}(\alpha)[\mathbf{q}, \mathbf{r}][[t]] \\ p_{\pi} &\longmapsto \sum_{\mu, \nu} t^{|\mu|+|\nu|-|\lambda|} g_{\mu, \nu}^{\pi}(\alpha) q_{\mu} r_{\nu}. \end{aligned}$$

Les équations différentielles sont équivalentes aux relations de commutations

$$\left(\mathcal{C}_{\ell}^{(\alpha)}(-t, \mathbf{q}) + \mathcal{C}_{\ell}^{(\alpha)}(-t, \mathbf{r}) \right) \cdot \mathcal{G}^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \mathcal{G}^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \cdot \mathcal{C}_{\ell}^{(\alpha)}(-t, \mathbf{p}).$$

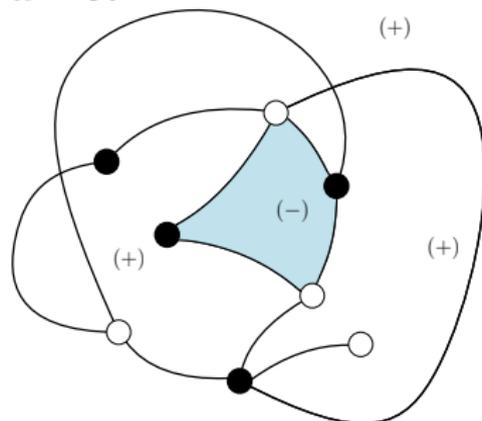
Preuve combinatoire pour $\alpha = 1$

On considère des cartes biparties, à faces coloriées.

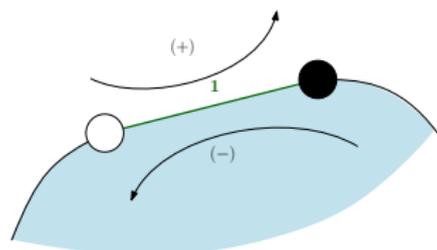


Preuve combinatoire pour $\alpha = 1$

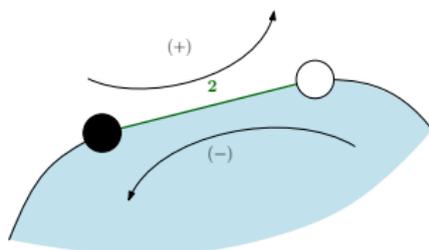
On considère des cartes biparties, à faces coloriées.



On distingue deux types d'arêtes bicolores:

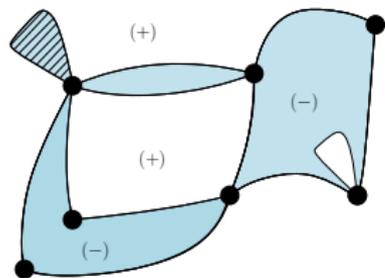


Une arête de **type 1**

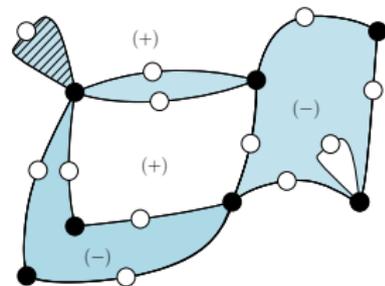
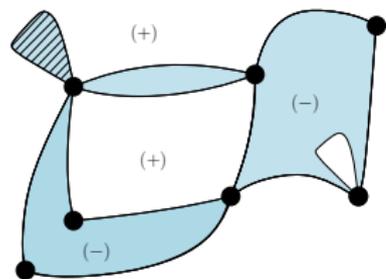


Une arête de **type 2**

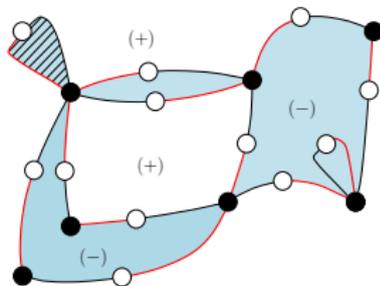
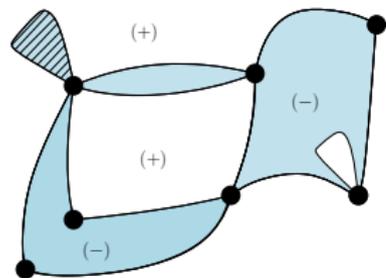
Preuve combinatoire pour $\alpha = 1$



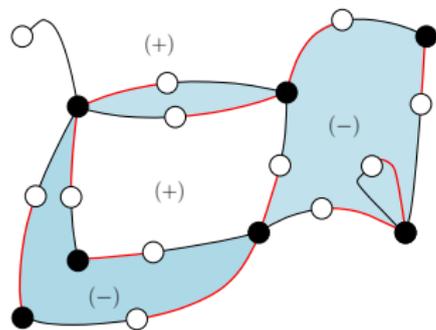
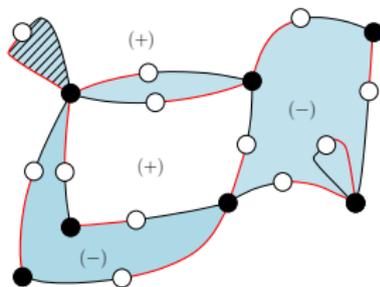
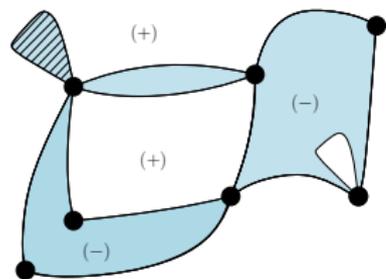
Preuve combinatoire pour $\alpha = 1$



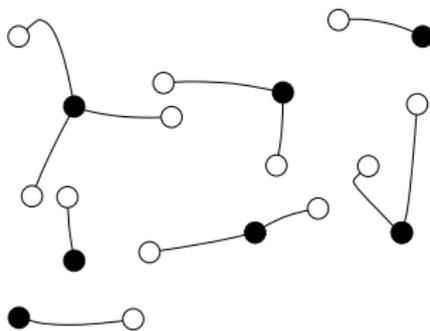
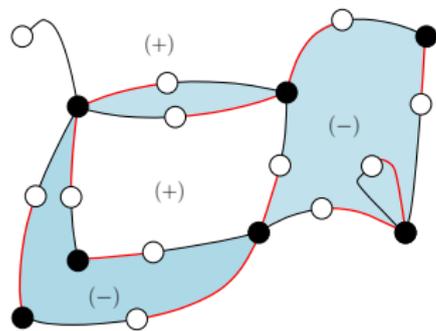
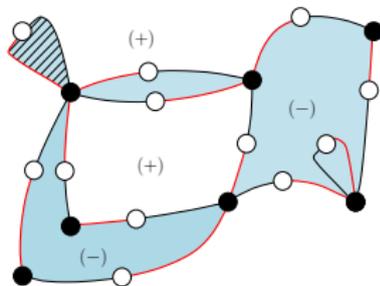
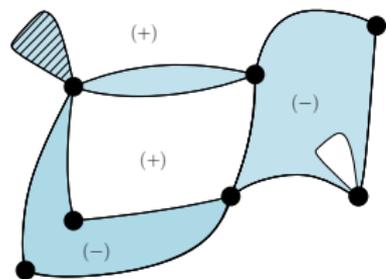
Preuve combinatoire pour $\alpha = 1$



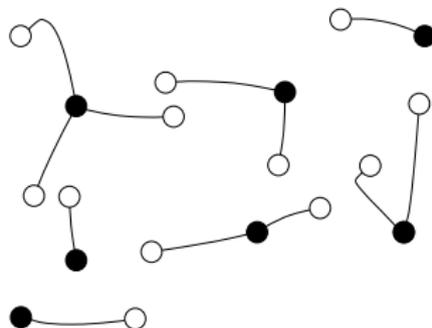
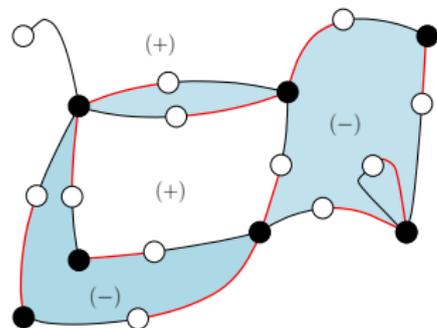
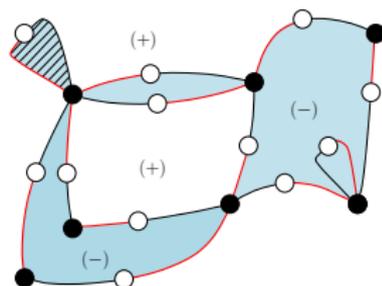
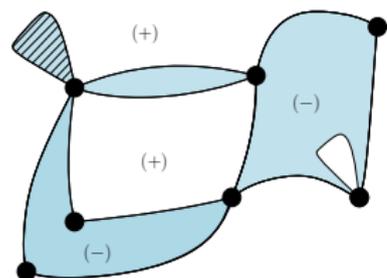
Preuve combinatoire pour $\alpha = 1$



Preuve combinatoire pour $\alpha = 1$



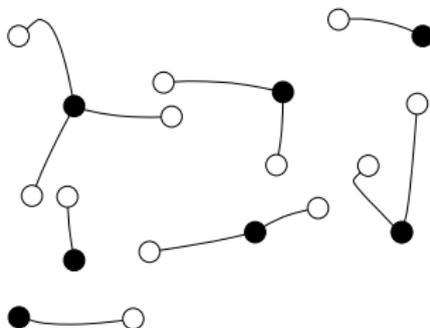
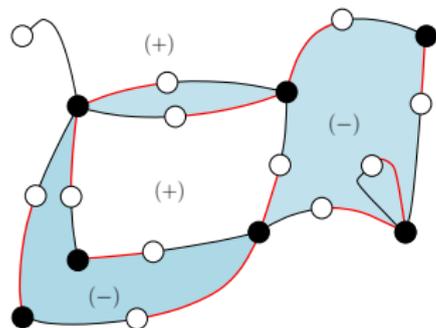
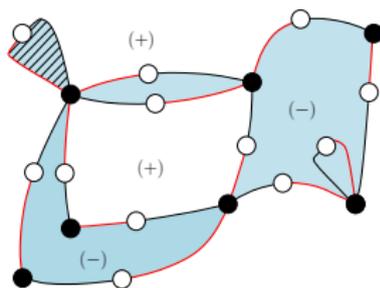
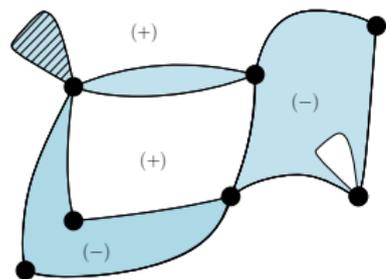
Preuve combinatoire pour $\alpha = 1$



$g_{\mu, \nu}^{\pi}(1)$ compte le nombre de façons :

- d'ajouter des arêtes sur une carte π -étoile.
- colorier les faces de telle sorte que : les arêtes ajoutées soient bicolores de type 2, $\lambda^+ = \mu$ et $\lambda^- = \nu$.

Preuve combinatoire pour $\alpha = 1$



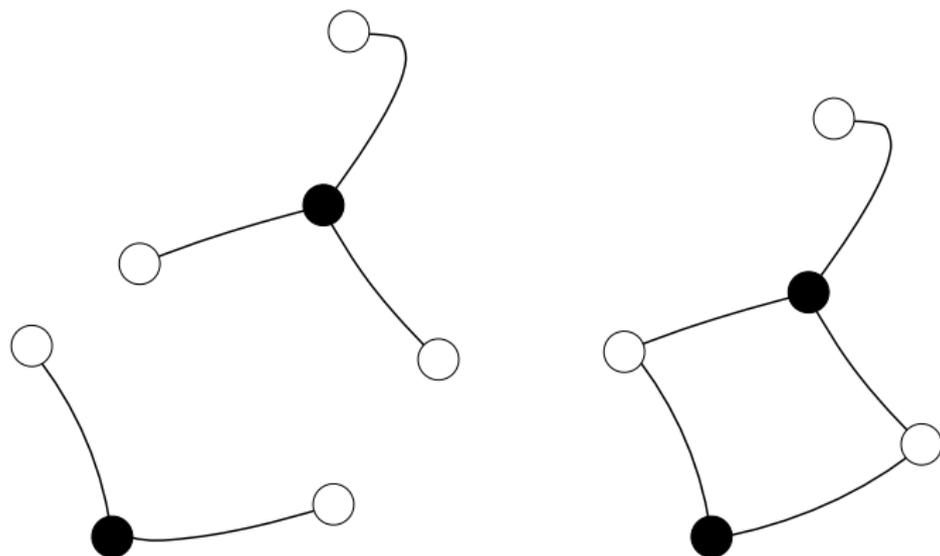
$g_{\mu, \nu}^{\pi}(1)$ compte le nombre de façons :

- d'ajouter des arêtes sur une carte de **partition de face** π .
- colorier les faces de telle sorte que : les arêtes ajoutées soient bicolores de type 2, $\lambda^+ = \mu$ et $\lambda^- = \nu$.

Preuve combinatoire pour $\alpha = 1$

On a les mêmes possibilités d'ajouter des arêtes et colorier les faces sur deux cartes de même partition des faces.

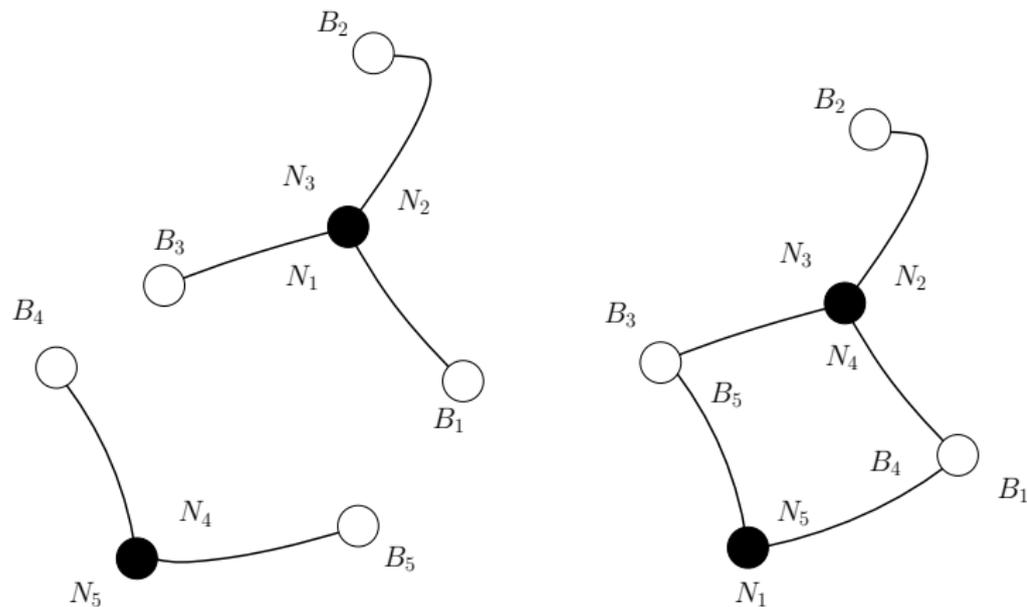
Exemple :



Preuve combinatoire pour $\alpha = 1$

On a les mêmes possibilités d'ajouter des arêtes et colorier les faces sur deux cartes de même partition des faces.

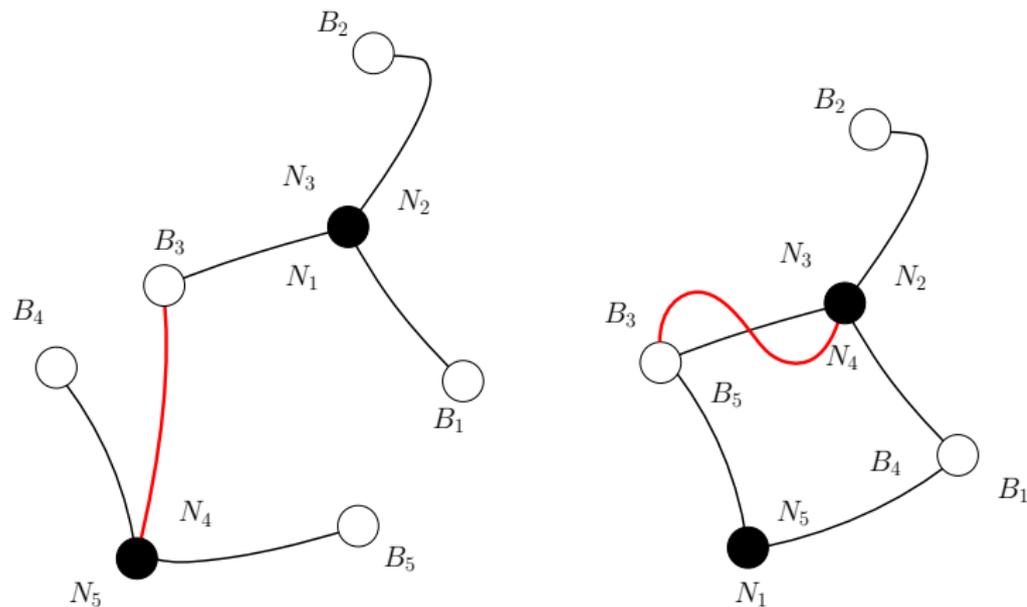
Exemple :



Preuve combinatoire pour $\alpha = 1$

On a les mêmes possibilités d'ajouter des arêtes et colorier les faces sur deux cartes de même partition des faces.

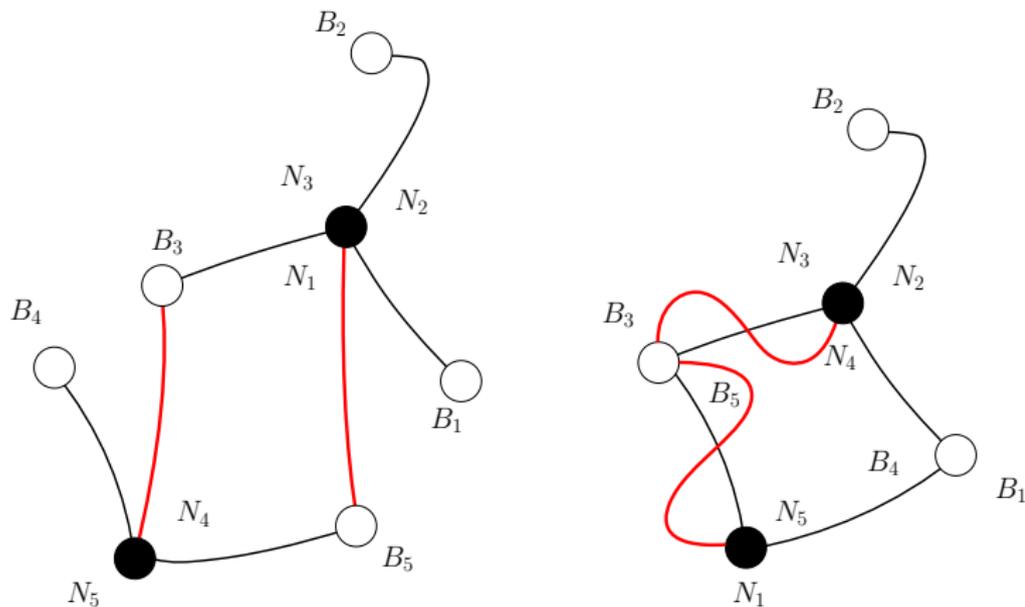
Exemple :



Preuve combinatoire pour $\alpha = 1$

On a les mêmes possibilités d'ajouter des arêtes et colorier les faces sur deux cartes de même partition des faces.

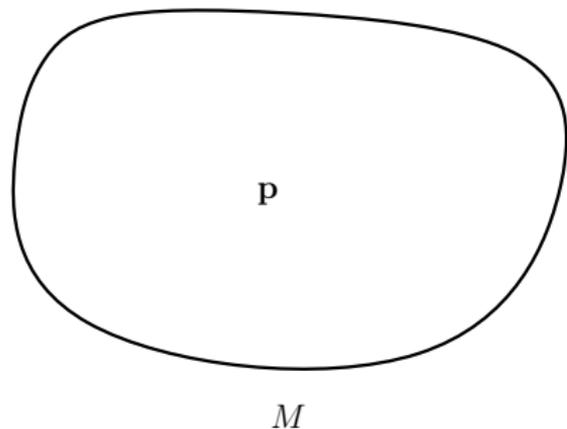
Exemple :



Preuve combinatoire pour $\alpha = 1$

On fixe une carte bipartie M .

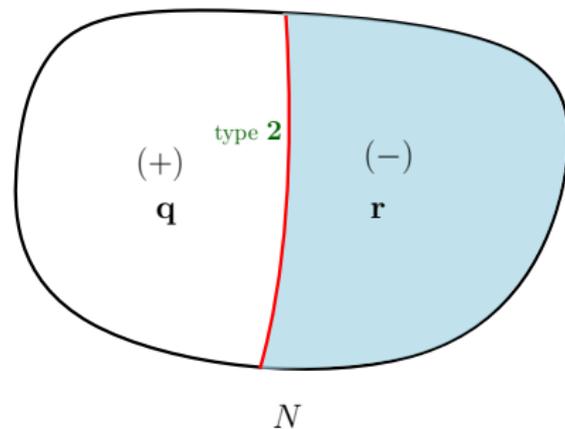
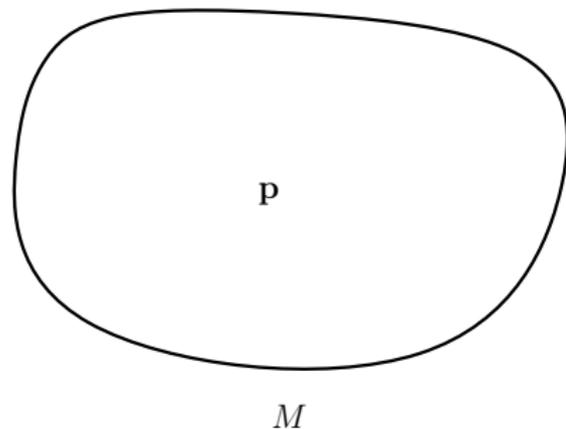
$$\mathcal{G}^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \cdot \frac{t^{|M|} p_{\lambda^\diamond(M)}}{|M|!} = \sum_N t^{|N|} \frac{q_{\lambda^+(N)} r_{\lambda^-(N)}}{|N|!}$$



Preuve combinatoire pour $\alpha = 1$

On fixe une carte bipartie M .

$$\mathcal{G}^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \cdot \frac{t^{|M|} p_{\lambda^\diamond(M)}}{|M|!} = \sum_N t^{|N|} \frac{q_{\lambda^+(N)} r_{\lambda^-(N)}}{|N|!}$$



Preuve combinatoire pour $\alpha = 1$

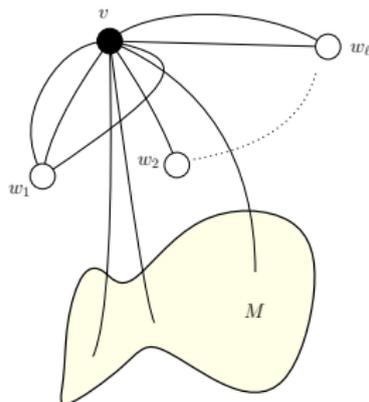
$$\left(\mathcal{C}_\ell^{(1)}(-t, \mathbf{q}) + \mathcal{C}_\ell^{(1)}(-t, \mathbf{r})\right) \cdot \mathcal{G}^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \mathcal{G}^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \cdot \mathcal{C}_\ell^{(1)}(-t, \mathbf{p}).$$

Preuve combinatoire pour $\alpha = 1$

$$\left(\mathcal{C}_\ell^{(1)}(-t, \mathbf{q}) + \mathcal{C}_\ell^{(1)}(-t, \mathbf{r})\right) \cdot \mathcal{G}^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \mathcal{G}^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \cdot \mathcal{C}_\ell^{(1)}(-t, \mathbf{p}).$$

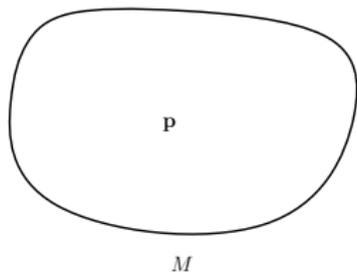
Rappel:

$$\mathcal{C}_\ell^{(1)}(t, \mathbf{p}) \cdot \frac{t^{|M|} p_{\lambda^\diamond(M)}}{|M|!} = \sum_N t^{|N|} \frac{p_{\lambda^\diamond(N)}}{|N|!},$$



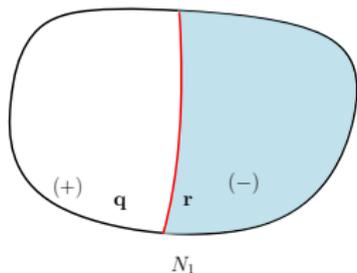
Preuve combinatoire pour $\alpha = 1$

$$\left(\mathcal{C}_\ell^{(1)}(-t, \mathbf{q}) + \mathcal{C}_\ell^{(1)}(-t, \mathbf{r})\right) \cdot \mathcal{G}^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \mathcal{G}^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \cdot \mathcal{C}_\ell^{(1)}(-t, \mathbf{p}).$$



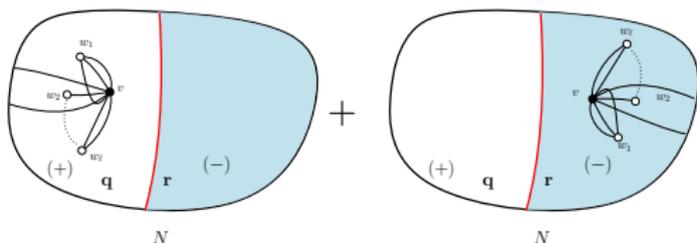
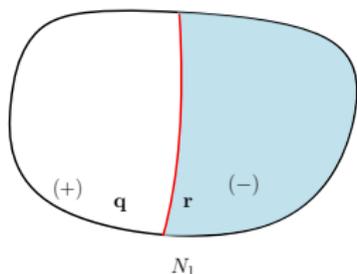
Preuve combinatoire pour $\alpha = 1$

$$\left(\mathcal{C}_\ell^{(1)}(-t, \mathbf{q}) + \mathcal{C}_\ell^{(1)}(-t, \mathbf{r})\right) \cdot \mathcal{G}^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \mathcal{G}^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \cdot \mathcal{C}_\ell^{(1)}(-t, \mathbf{p}).$$



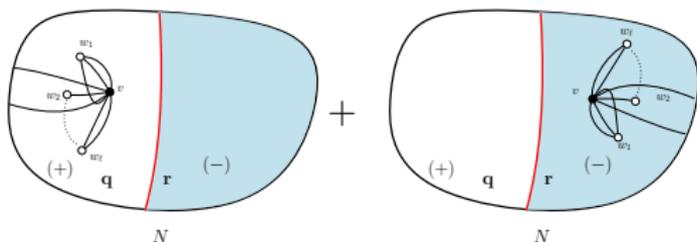
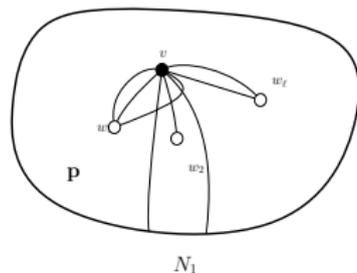
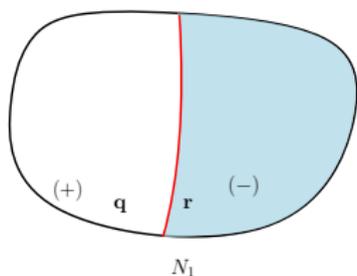
Preuve combinatoire pour $\alpha = 1$

$$\left(\mathcal{C}_\ell^{(1)}(-t, \mathbf{q}) + \mathcal{C}_\ell^{(1)}(-t, \mathbf{r})\right) \cdot \mathcal{G}^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \mathcal{G}^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \cdot \mathcal{C}_\ell^{(1)}(-t, \mathbf{p}).$$



Preuve combinatoire pour $\alpha = 1$

$$\left(\mathcal{C}_\ell^{(1)}(-t, \mathbf{q}) + \mathcal{C}_\ell^{(1)}(-t, \mathbf{r}) \right) \cdot \mathcal{G}^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \mathcal{G}^{(1)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \cdot \mathcal{C}_\ell^{(1)}(-t, \mathbf{p}).$$



Conjecture de positivité

Conjecture (Goulden–Jackson '96+Śniady '19)

*Les coefficients $g_{\mu,\nu}^{\pi}$ sont des **polynômes** en $b := \alpha - 1$ à coefficients **entiers** et **positifs**. De plus $g_{\mu,\nu}^{\pi}(\alpha)$ compte des hypercartes avec des poids de non-orientabilité.*

La conjecture Matching-Jack de Goulden–Jackson correspond au cas $|\pi| = |\mu| = |\nu|$.

- Polynomialité : Dołęga–Féray '16.
- Intégralité : B.D. '22.
- Positivité ??

Résolution de l'équation différentielle

Théorème (B.D. '24)

$$g_{\mu,\nu}^{\lambda}(\alpha) = (-1)^{|\mu|+|\nu|-|\lambda|} \sum_{m \geq 0} (-1)^m \sum_{\substack{\pi_1, \dots, \pi_m \\ |\pi_1| < \dots < |\pi_m|}} a_{\pi_1}^{\lambda} a_{\pi_2}^{\pi_1} a_{\pi_3}^{\pi_2} \dots a_{\pi_m}^{\pi_{m-1}} d_{\mu,\nu}^{\pi_m},$$

où

$$a_{\xi}^{\lambda} := [t^{|\xi|} p_{\xi}] \left(\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \alpha \lambda_i \mathcal{C}_{\lambda_i}^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}) \right) \cdot 1$$

et

$$d_{\mu,\nu}^{\lambda} := [t^{|\mu|+|\nu|} q_{\mu} r_{\nu}] \prod_{1 \leq i \leq \ell(\mu)} \alpha \lambda_i \left(\mathcal{C}_{\lambda_i}^{(\alpha)}(t, \mathbf{q}) + \mathcal{C}_{\lambda_i}^{(\alpha)}(t, \mathbf{r}) \right) \cdot 1,$$

Applications $\mathcal{G}^{(\alpha)}(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \sum_{k \geq 0} t^k \mathcal{G}_k^{(\alpha)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$.

Théorème (B.D. '24)

$$\mathcal{G}_0^{(\alpha)} = \Psi, \quad \text{où } \Psi \cdot p_\lambda = \prod_{1 \leq i \leq \ell(\lambda)} (q_i + r_i).$$

$$\mathcal{G}_1^{(\alpha)} = \sum_{m \geq 1} \sum_{\substack{m_1 + m_2 = m+1 \\ m_1, m_2 \geq 1}} q_{m_1} r_{m_2} \cdot \Psi \cdot \frac{m \partial}{\partial p_m},$$

$$\mathcal{G}_2^{(\alpha)} = \frac{1}{2} \sum_{m \geq 1} \sum_{\substack{m_1 + m_2 = m+2 \\ m_1, m_2 \geq 1}} b(m_1 - 1)(m_2 - 1) q_{m_1} r_{m_2} \Psi \frac{m \partial}{\partial p_m}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{m \geq 1} \sum_{\substack{m_1 + m_2 + m_3 = m+2 \\ m_1, m_2, m_3 \geq 1}} (m_1 - 1)(q_{m_1} r_{m_2} r_{m_3} + r_{m_1} q_{m_2} q_{m_3}) \Psi \frac{m \partial}{\partial p_m}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k, m \geq 1} \sum_{\substack{i_1 + i_2 = k+m+2 \\ i_1, i_2 \geq 1}} \alpha \min(m, k, i_1 - 1, i_2 - 1) q_{i_1} r_{i_2} \Psi \frac{m \partial}{\partial p_m} \frac{k \partial}{\partial p_k}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{m, k \geq 1} \sum_{\substack{m_1 + m_2 = m+1 \\ m_1, m_2 \geq 1}} \sum_{\substack{k_1 + k_2 = k+1 \\ k_1, k_2 \geq 1}} q_{m_1} q_{k_1} r_{m_2} r_{k_2} \Psi \frac{m \partial}{\partial p_m} \frac{k \partial}{\partial p_k}.$$