

Décompositions des mots tassés et auto-dualité de l'algèbre des fonctions quasi-symétriques en mots

Journée Combinatoires de Bordeaux
JCB 2023

Hugo Mlodecki

31 Janvier 2023

Décompositions des mots tassés et auto-dualité de l'algèbre des fonctions quasi-symétriques en mots

Journée Combinatoires de Bordeaux
JCB 2023

Hugo Mlodecki

31 Janvier 2023

Premier mot

Premier mot

S O U T E N A N C E

Premier mot

A 
S O U T E N A N C E

The diagram shows a horizontal rectangle with a dot centered above the letter 'A' in the word 'SOUTENANCE'. The letter 'A' is the 8th character in the word.

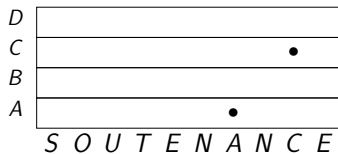
Premier mot



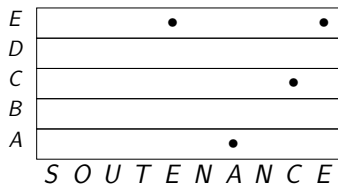
Premier mot



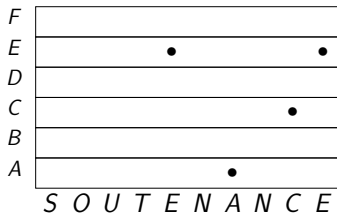
Premier mot



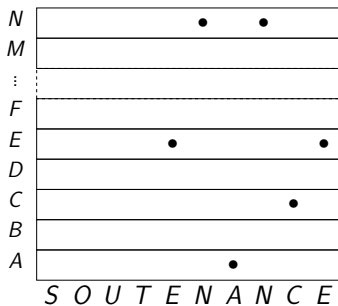
Premier mot



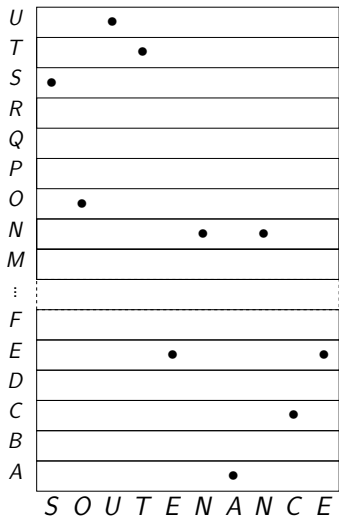
Premier mot



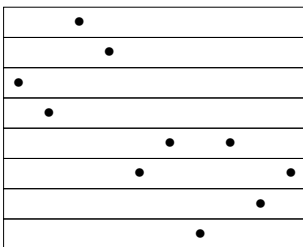
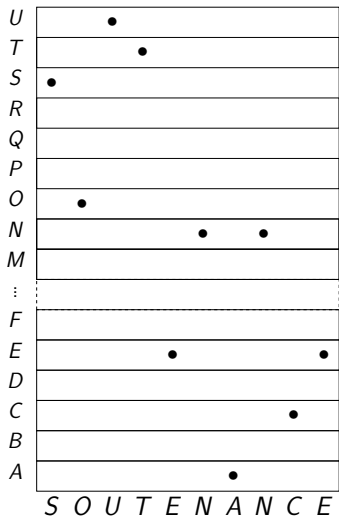
Premier mot



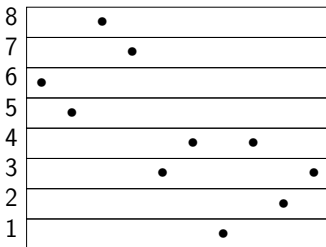
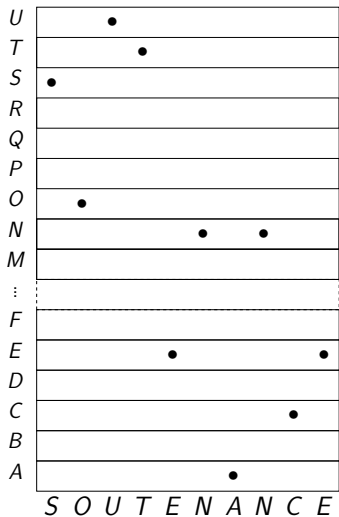
Premier mot



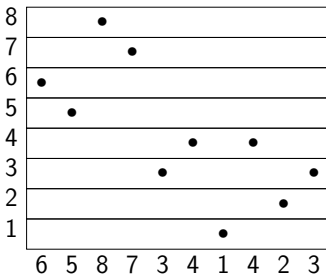
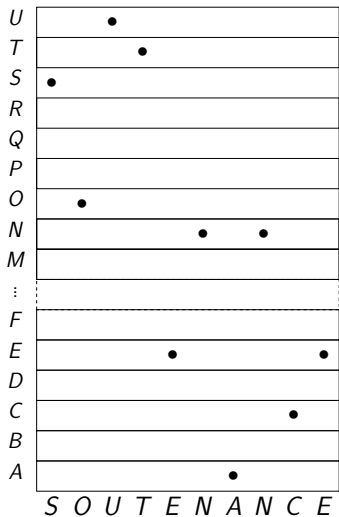
Premier mot tassé (opération de tassement)



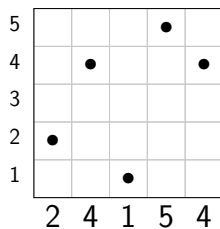
Premier mot tassé (opération de tassement)



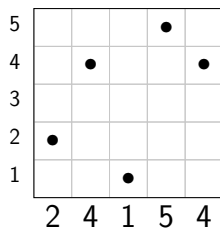
Premier mot tassé (opération de tassement)



Mots tassés (Packed Words)

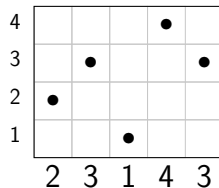


Mots tassés (Packed Words)



retrait des lignes vides

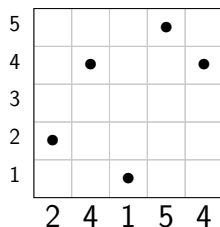
→ tassement →



Mots tassés (Packed Words)

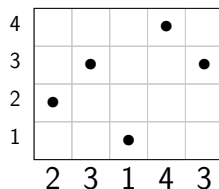
Définition [Duchamp-Hivert-Thibon]

Un mot sur l'alphabet $\mathbb{N}_{>0}$ est dit **tassé** s'il est invariant par tassement.



retrait des lignes vides

→ tassement →



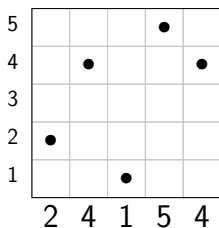
Mots tassés (Packed Words)

Définition [Duchamp-Hivert-Thibon]

Un mot sur l'alphabet $\mathbb{N}_{>0}$ est dit **tassé** s'il est invariant par tassement.

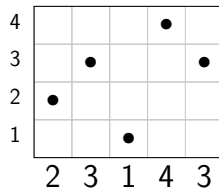
Lemme [Duchamp-Hivert-Thibon]

Un mot sur l'alphabet $\mathbb{N}_{>0}$ est **tassé** si toutes les lettres de 1 à son maximum m apparaissent au moins une fois.



retrait des lignes vides

→ tassement →



Mots tassés (Packed Words)

Mots tassés de tailles 0, 1, 2 et 3

- ϵ

Mots tassés (Packed Words)

Mots tassés de tailles 0, 1, 2 et 3

- ϵ
- 1

Mots tassés (Packed Words)

Mots tassés de tailles 0, 1, 2 et 3

- ϵ
- 1
- 12 21 11 ~~22~~

Mots tassés (Packed Words)

Mots tassés de tailles 0, 1, 2 et 3

- ϵ
- 1
- 12 21 11 ~~22~~
- 123 132 213 231 312 321
122 212 221 112 121 211 111

Mots tassés (Packed Words)

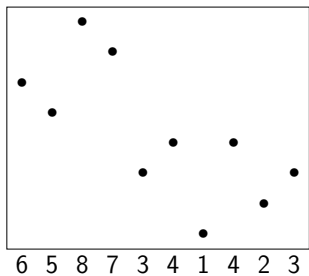
Mots tassés de tailles 0, 1, 2 et 3

- ϵ
- 1
- 12 21 11 ~~22~~
- 123 132 213 231 312 321
122 212 221 112 121 211 111

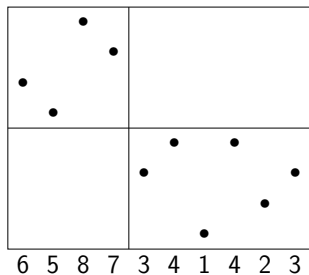
Mots tassés de taille n [OEIS A000670]

n	1	2	3	4	5	6	7	8
PW_n	1	3	13	75	541	4683	47293	545835

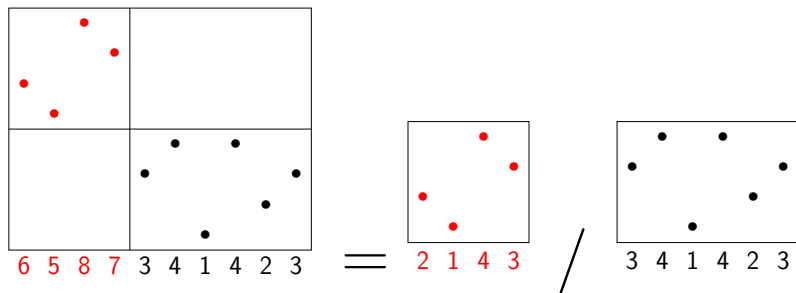
Première décomposition



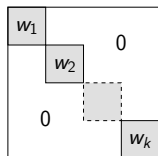
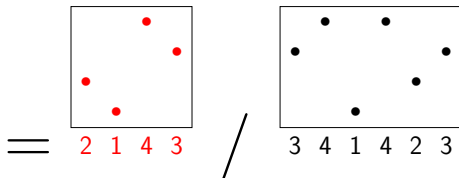
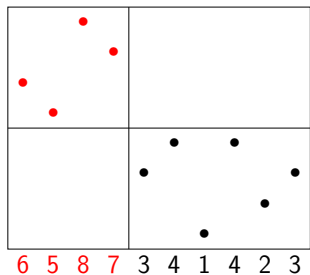
Première décomposition en descentes globales



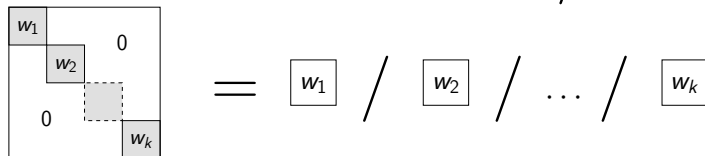
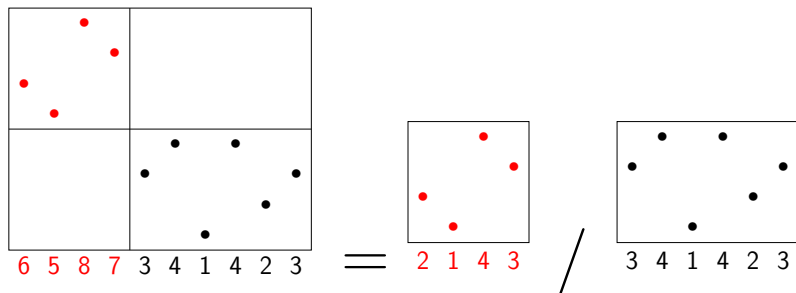
Première décomposition en descentes globales



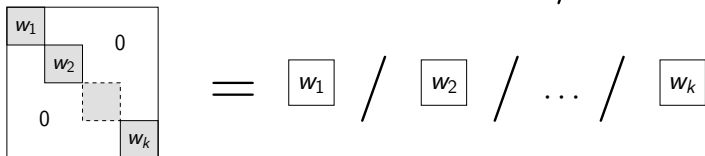
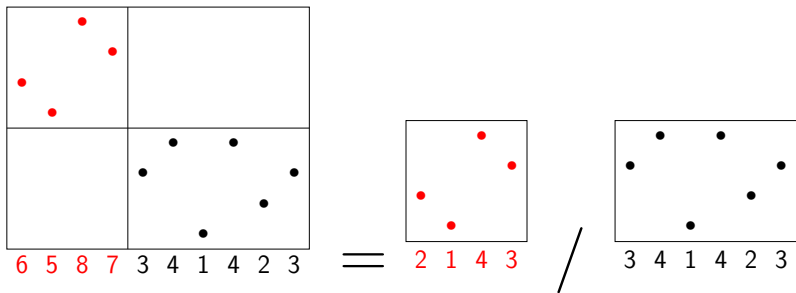
Première décomposition en descentes globales



Première décomposition en descentes globales



Première décomposition en descentes globales



Mots tassés irréductibles

Un mot tassé w est irréductible s'il est non vide et n'a pas de descente globale.

Décompositions des mots tassés et auto-dualité de l'algèbre des fonctions quasi-symétriques en mots

Algèbres de Hopf

Exemple

WQSym

- $3112 + 212 - 3 \cdot 212341 - \frac{5}{3} \cdot 111$

Algèbres de Hopf

Exemple

WQSym

- $\mathbb{R}_{3112} + \mathbb{R}_{212} - 3\mathbb{R}_{212341} - \frac{5}{3}\mathbb{R}_{111}$

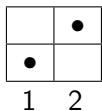
Algèbres de Hopf

Exemple

WQSym

- $\mathbb{R}_{3112} + \mathbb{R}_{212} - 3\mathbb{R}_{212341} - \frac{5}{3}\mathbb{R}_{111}$
 - $\mathbb{R}_{12}\mathbb{R}_{11} = \mathbb{R}_{1233} + \mathbb{R}_{1323} + \mathbb{R}_{1332} + \mathbb{R}_{3123} + \mathbb{R}_{3132} + \mathbb{R}_{3312}$
 - $\Delta(\mathbb{R}_{24231}) = \mathbb{R}_\epsilon \otimes \mathbb{R}_{24231} + \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_{21} + \mathbb{R}_{1312} \otimes \mathbb{R}_1 + \mathbb{R}_{24231} \otimes \mathbb{R}_\epsilon$
-
- Un produit associatif unitaire: \cdot
 - Un coproduit coassociatif counitaire: Δ
 - La relation de Hopf: $\Delta(a \cdot b) = \Delta(a) \cdot \Delta(b)$

Produit de mélange sur les mots tassés



Produit de mélange sur les mots tassés

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \bullet \\ \hline \bullet & \\ \hline \end{array} \quad \boxplus \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} =$$

1 2 1 1

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & \bullet & \bullet \\ \hline & \bullet & & \\ \hline \bullet & & & \\ \hline \end{array}$$

1 2 3 3

Produit de mélange sur les mots tassés

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \bullet \\ \hline \bullet & \\ \hline \end{array} \quad \boxplus \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} =$$

1 2 1 1

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & \bullet & \bullet \\ \hline & & & \\ \hline \bullet & & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \bullet & & \bullet \\ \hline & & \bullet & \\ \hline \bullet & & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \bullet & \bullet & \\ \hline & & & \bullet \\ \hline \bullet & & & \\ \hline \end{array}$$

1 2 3 3 1 3 2 3 1 3 3 2

$$+ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bullet & & & \bullet \\ \hline & & \bullet & \\ \hline & \bullet & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bullet & & \bullet & \\ \hline & & & \bullet \\ \hline & \bullet & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & & \\ \hline & & & \bullet \\ \hline & & \bullet & \\ \hline \end{array}$$

3 1 2 3 3 1 3 2 3 3 1 2

Produit de mélange sur les mots tassés

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \bullet \\ \hline \bullet & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} = \mathbb{R}$$

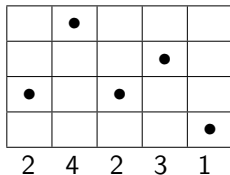
$\mathbb{R}_{12}\mathbb{R}_{11} = \mathbb{R}_{1233} + \mathbb{R}_{1323} + \mathbb{R}_{1332} + \mathbb{R}_{3123} + \mathbb{R}_{3132} + \mathbb{R}_{3312}$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & \bullet & \bullet \\ \hline & & & \\ \hline \bullet & & & \\ \hline \end{array} \quad + \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \bullet & & \bullet \\ \hline & & \bullet & \\ \hline \bullet & & & \\ \hline \end{array} \quad + \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \bullet & \bullet & \\ \hline & & & \bullet \\ \hline \bullet & & & \\ \hline \end{array}$$

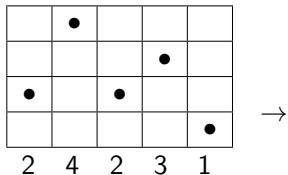
$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bullet & & & \bullet \\ \hline & & \bullet & \\ \hline & \bullet & & \\ \hline \end{array} \quad + \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bullet & & \bullet & \\ \hline & & & \bullet \\ \hline & \bullet & & \\ \hline \end{array} \quad + \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & & \\ \hline & & & \bullet \\ \hline & & \bullet & \\ \hline \end{array}$

$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$

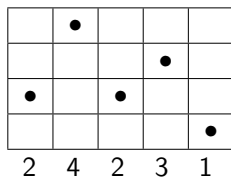
Déconcaténation réduite



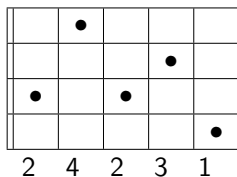
Déconcaténation réduite



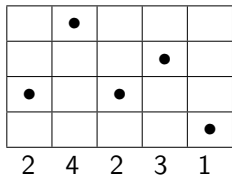
Déconcaténation réduite



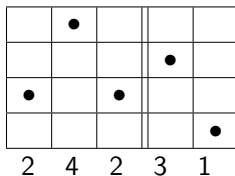
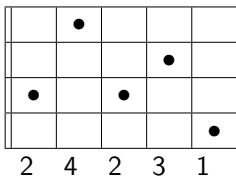
→



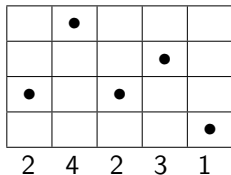
Déconcaténation réduite



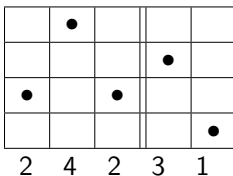
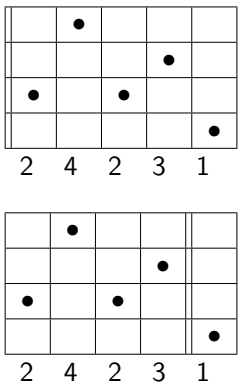
→



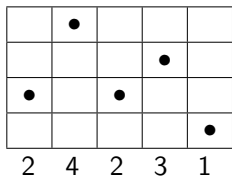
Déconcaténation réduite



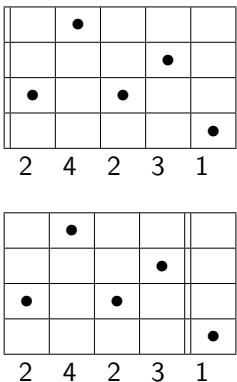
→



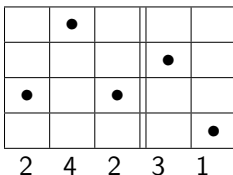
Déconcaténation réduite



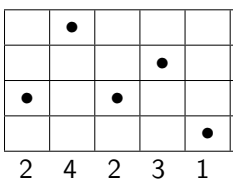
→



+

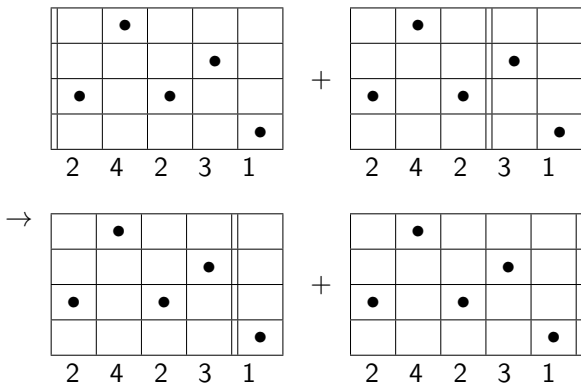


+



Déconcaténation réduite

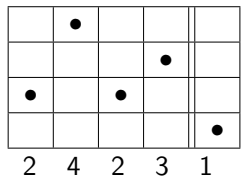
\mathbb{R}_{24231}



Déconcaténation réduite

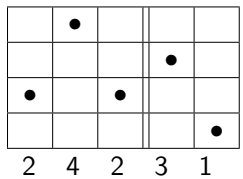
\mathbb{R}_{24231}

Δ
 \rightarrow

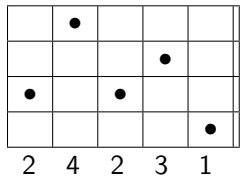


$\mathbb{R}_\epsilon \otimes \mathbb{R}_{24231}$

+



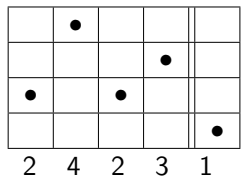
+



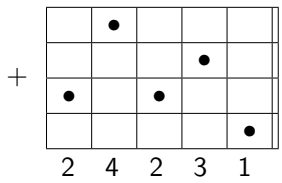
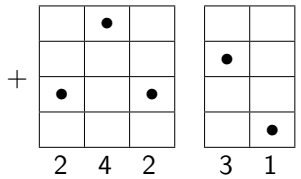
Déconcaténation réduite

\mathbb{R}_{24231}

Δ
 \rightarrow



$\mathbb{R}_\epsilon \otimes \mathbb{R}_{24231}$

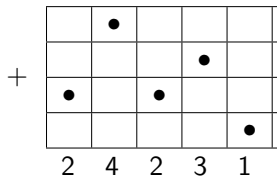
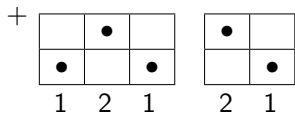
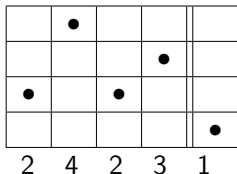


Déconcaténation réduite

\mathbb{R}_{24231}

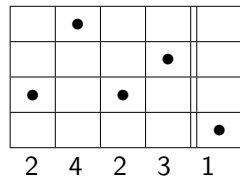
$\mathbb{R}_\epsilon \otimes \mathbb{R}_{24231}$

Δ
→

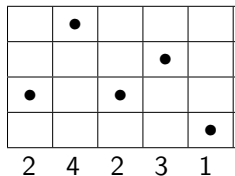


Déconcaténation réduite

$$\mathbb{R}_\epsilon \otimes \mathbb{R}_{24231} + \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_{21}$$

 \mathbb{R}_{24231}
 Δ
 \rightarrow


+



Déconcaténation réduite

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathbb{R}_\epsilon \otimes \mathbb{R}_{24231} + \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_{21} \\
 & & \\
 \mathbb{R}_{24231} & \begin{array}{c} \Delta \\ \rightarrow \end{array} & \\
 & & \mathbb{R}_{1312} \otimes \mathbb{R}_1 + \mathbb{R}_{24231} \otimes \mathbb{R}_\epsilon
 \end{array}$$

Espace des éléments primitifs

$$\Delta(\mathbb{R}_{23112}) =$$

Espace des éléments primitifs

$$\Delta(\mathbb{R}_{23112}) = \mathbb{R}_\epsilon \otimes \mathbb{R}_{23112} + \mathbb{R}_{23112} \otimes \mathbb{R}_\epsilon$$

Espace des éléments primitifs

$$\Delta(\mathbb{R}_{23112}) = \mathbb{R}_\epsilon \otimes \mathbb{R}_{23112} + \mathbb{R}_{23112} \otimes \mathbb{R}_\epsilon$$

$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{23112}) = 0$$

Espace des éléments primitifs

$$\Delta(\mathbb{R}_{23112}) = \mathbb{R}_\epsilon \otimes \mathbb{R}_{23112} + \mathbb{R}_{23112} \otimes \mathbb{R}_\epsilon$$

$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{23112}) = 0$$

Élément primitif

P est un élément primitif si $\tilde{\Delta}(P) = 0$.

Espace des éléments primitifs

$$\Delta(\mathbb{R}_{23112}) = \mathbb{R}_\epsilon \otimes \mathbb{R}_{23112} + \mathbb{R}_{23112} \otimes \mathbb{R}_\epsilon$$

$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{23112}) = 0$$

Élément primitif

P est un élément primitif si $\tilde{\Delta}(P) = 0$.

Exemple : $\mathbb{R}_{1213} - \mathbb{R}_{2321}$

Espace des éléments primitifs

$$\Delta(\mathbb{R}_{23112}) = \mathbb{R}_\epsilon \otimes \mathbb{R}_{23112} + \mathbb{R}_{23112} \otimes \mathbb{R}_\epsilon$$

$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{23112}) = 0$$

Élément primitif

P est un élément primitif si $\tilde{\Delta}(P) = 0$.

Exemple : $\mathbb{R}_{1213} - \mathbb{R}_{2321}$

$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{1213}) = \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_1$$

$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{2321}) = \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_1$$

Espace des éléments primitifs

$$\Delta(\mathbb{R}_{23112}) = \mathbb{R}_\epsilon \otimes \mathbb{R}_{23112} + \mathbb{R}_{23112} \otimes \mathbb{R}_\epsilon$$

$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{23112}) = 0$$

Élément primitif

P est un élément primitif si $\tilde{\Delta}(P) = 0$.

Exemple : $\mathbb{R}_{1213} - \mathbb{R}_{2321}$

$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{1213}) = \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_1$$

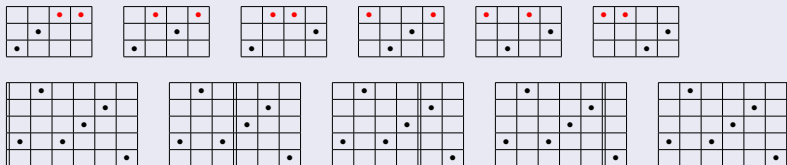
$$\tilde{\Delta}(\mathbb{R}_{2321}) = \mathbb{R}_{121} \otimes \mathbb{R}_1$$

Proposition

$\dim(\mathbf{Prim}_n) =$ nombre de mots tassés irréductibles de taille n .

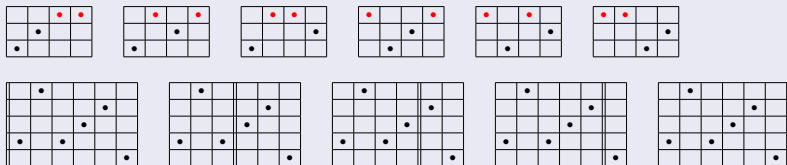
Dualité dans WQSym

Produit et coproduit dans la base \mathbb{R}



Dualité dans WQSym

Produit et coproduit dans la base \mathbb{R}

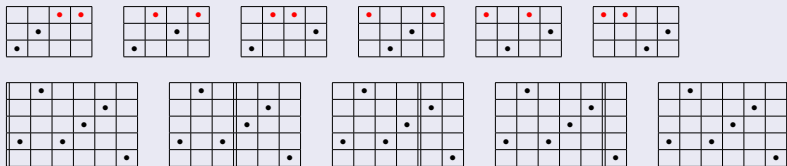


Coproduct dual d'un élément:

Toutes les paires dont le produit fait apparaître l'élément.

Dualité dans WQSym

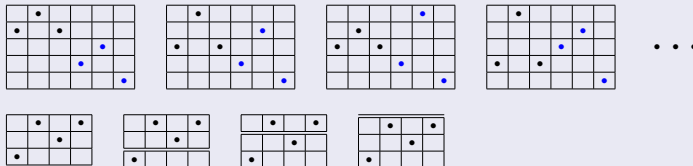
Produit et coproduit dans la base \mathbb{R}



Coproduct dual d'un élément:

Toutes les paires dont le produit fait apparaître l'élément.

Produit et coproduit dans la base \mathbb{Q}



Auto-dualité

- 2001 Duchamp-Hivert-Thibon définissent **WQSym** et conjecturent l'auto-dualité.

Auto-dualité

- 2001 Duchamp-Hivert-Thibon définissent **WQSym** et conjecturent l'auto-dualité.
- 2005 Foissy démontre l'auto-dualité des bigèbre bidendriforme (rigidité).

Auto-dualité

- 2001 Duchamp-Hivert-Thibon définissent **WQSym** et conjecturent l'auto-dualité.
- 2005 Foissy démontre l'auto-dualité des bigèbre bidendriforme (rigidité).
- 2006 Novelli-Thibon prouvent que **WQSym** est une bigèbres bidendriformes.

Auto-dualité

- 2001 Duchamp-Hivert-Thibon définissent **WQSym** et conjecturent l'auto-dualité.
- 2005 Foissy démontre l'auto-dualité des bigèbre bidendriforme (rigidité).
- 2006 Novelli-Thibon prouvent que **WQSym** est une bigèbres bidendriformes.
- 2006 Bergeron-Zabrocki définissent les bases \mathbb{Q} et $\mathbb{R} := \mathbb{Q}^*$ de **WQSym** et **WQSym**^{*}.

Auto-dualité

- 2001 Duchamp-Hivert-Thibon définissent **WQSym** et conjecturent l'auto-dualité.
- 2005 Foissy démontre l'auto-dualité des bigèbre bidendriforme (rigidité).
- 2006 Novelli-Thibon prouvent que **WQSym** est une bigèbres bidendriformes.
- 2006 Bergeron-Zabrocki définissent les bases \mathbb{Q} et $\mathbb{R} := \mathbb{Q}^*$ de **WQSym** et **WQSym**^{*}.
- Il manquait une base de **TPrim** pour avoir un isomorphisme bidendriforme explicite.

Théorème de rigidité

Théorème [Foissy]

Si A est une bigèbre bidendriforme alors A est générée librement par $\mathbf{TPrim}(A)$ en tant qu'algèbre dendriforme.

Théorème de rigidité

Théorème [Foissy]

Si A est une bigèbre bidendriforme alors A est générée librement par $\mathbf{TPrim}(A)$ en tant qu'algèbre dendriforme.

Point de vue combinatoire

Si $B = (b_i)_i$ est une base de $\mathbf{TPrim}(A)$ alors on peut construire une base de A en recomposant des forêts planes étiquetées par des b_i .

Théorème de rigidité

Théorème [Foissy]

Si A est une bigèbre bidendriforme alors A est générée librement par $\mathbf{TPrim}(A)$ en tant qu'algèbre dendriforme.

Point de vue combinatoire

Si $B = (b_i)_i$ est une base de $\mathbf{TPrim}(A)$ alors on peut construire une base de A en recomposant des forêts planes étiquetées par des b_i .

Séries

n	1	2	3	4	5	6	7	8
WQSym_n	1	3	13	75	541	4 683	47 293	545 835
TPrim_n	1	1	4	28	240	2 384	26 832	337 168

Espace des éléments totalement primitifs

Élément primitif (rappel)

P est un élément primitif si $\tilde{\Delta}(P) = 0$.

Proposition (rappel)

$\dim(\mathbf{Prim}_n)$: nombre de mots tassés irréductibles de taille n .

Espace des éléments totalement primitifs

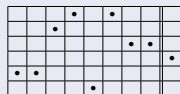
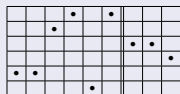
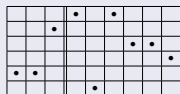
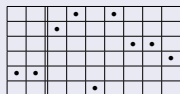
Élément primitif (rappel)

P est un élément primitif si $\tilde{\Delta}(P) = 0$.

Proposition (rappel)

$\dim(\mathbf{Prim}_n)$: nombre de mots tassés irréductibles de taille n .

Demi-coproduit



Espace des éléments totalement primitifs

Élément primitif (rappel)

P est un élément primitif si $\tilde{\Delta}(P) = 0$.

Proposition (rappel)

$\dim(\mathbf{Prim}_n)$: nombre de mots tassés irréductibles de taille n .

Élément totalement primitif

P est un élément totalement primitif si $\Delta_{\prec}(P) = \Delta_{\succ}(P) = 0$.

Espace des éléments totalement primitifs

Élément primitif (rappel)

P est un élément primitif si $\tilde{\Delta}(P) = 0$.

Proposition (rappel)

$\dim(\mathbf{Prim}_n)$: nombre de mots tassés irréductibles de taille n .

Élément totalement primitif

P est un élément totalement primitif si $\Delta_{\prec}(P) = \Delta_{\succ}(P) = 0$.

Question

$\dim(\mathbf{TPrim}_n)$: taille d'un sous ensemble de mots tassés de taille n ?

Mes contributions

1

Deux sous ensembles de mots tassés donnant la dimension que $\mathbf{TPrim}(\mathbf{WQSym})$ (rouges-irréductibles et bleus-irréductibles).

2

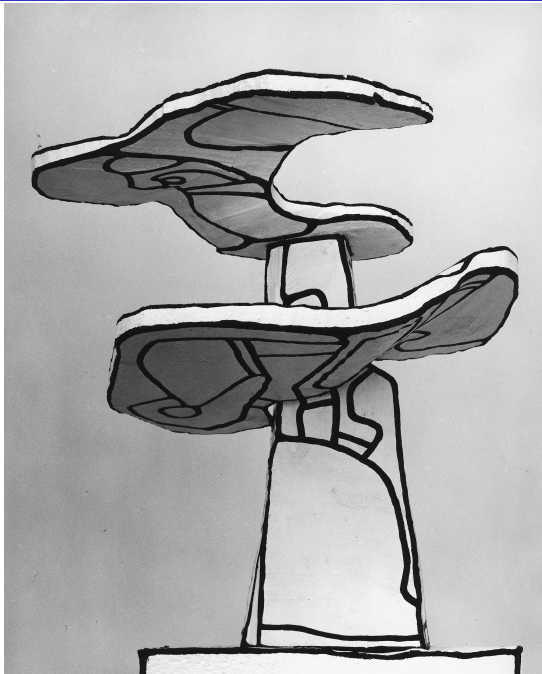
Construction de deux bases d'éléments totalement primitifs (dans \mathbf{WQSym} et \mathbf{WQSym}^*).

3

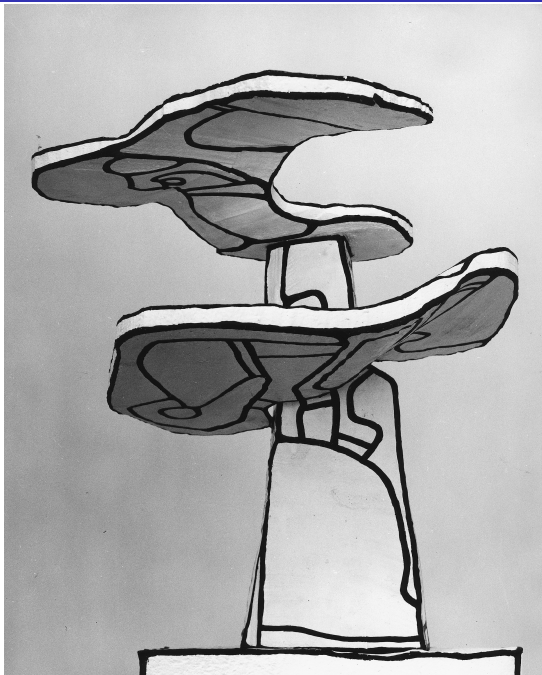
Isomorphisme bidendriforme fondé sur une bijection entre ces deux sous ensembles de mots tassés.

Jean Dubuffet, Arbre biplan (version I)

août 1968, époxy peint au polyuréthane (1ère épreuve), 72 x 61 x 48 cm,
coll. Fondation Dubuffet/© A.D.A.G.P. Paris



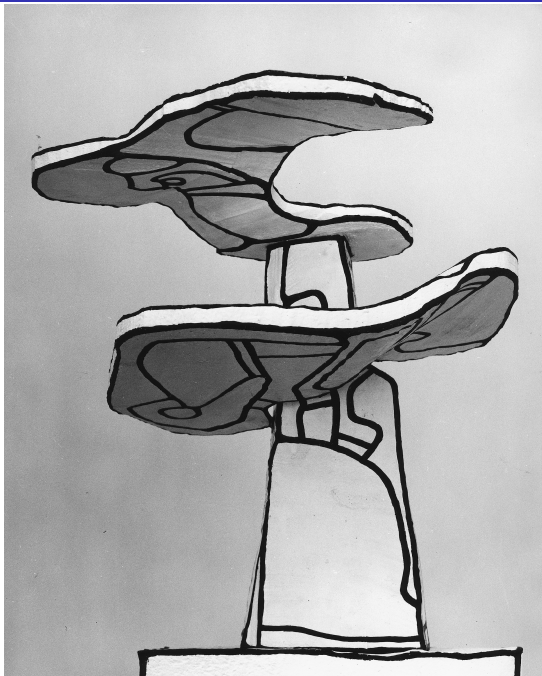
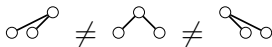
A diagram illustrating a bijection between a square grid and a sequence of divisions. On the left, a square grid is shown with a path of cells containing weights w_1, w_2, \dots, w_k and zeros. The path starts at the top-left cell (w_1), moves right to a cell with 0, then down to a cell with w_2 , then right to a cell with 0, then down to a cell with 0, then right to a cell with w_k . The grid is equated to the sequence of divisions $w_1 / w_2 / \dots / w_k$.



Jean Dubuffet, Arbre biplan (version I)

août 1968, époxy peint au polyuréthane (1ère épreuve), 72 x 61 x 48 cm,
coll. Fondation Dubuffet/© A.D.A.G.P. Paris



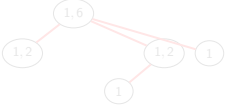
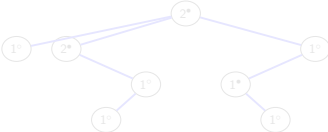
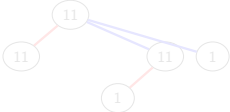
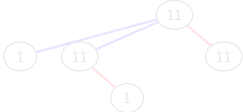
$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline w_1 & & 0 \\ \hline & w_2 & \\ \hline 0 & & w_k \\ \hline \end{array} = w_1 // w_2 // \dots // w_k$$



Jean Dubuffet, Arbre biplan (version I)

août 1968, époxy peint au polyuréthane (1ère épreuve), 72 x 61 x 48 cm,
coll. Fondation Dubuffet/© A.D.A.G.P. Paris

Mon verger d'arbres biplans (44523315)

	Squelettes	
	Arbres tassés	
	Arbres bicolores	

Mon verger d'arbres biplans (44523315)

1


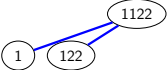
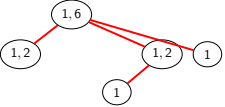
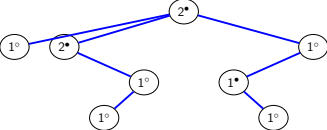
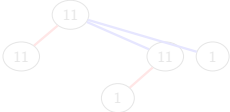
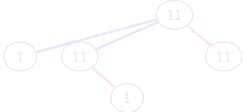
Deux sous ensembles de mots tassés donnant la dimension que $\text{TPrim}(\mathbf{WQSym})$ (rouges-irréductibles et bleus-irréductibles).

	Squelettes	
	Arbres tassés	
	Arbres bicolores	

Mon verger d'arbres biplans (44523315)

2


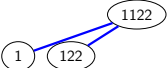
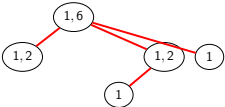
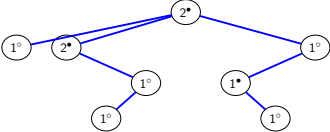
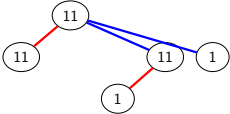
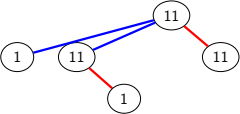
Construction de deux bases de totalement primitif
(dans **WQSym** et **WQSym***).

	Squelettes	
	Arbres tassés	
	Arbres bicolorés	

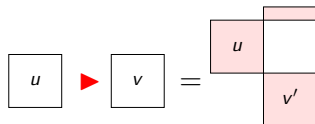
Mon verger d'arbres biplans (44523315)

3

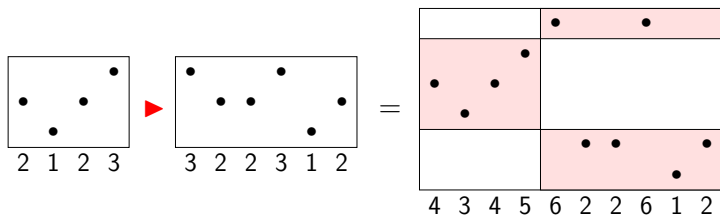
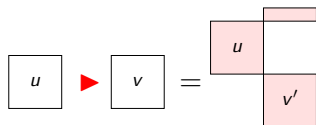
Isomorphisme bidendriforme fondé sur une bijection entre ses deux sous ensembles de mots tassés.

	Squelettes	
	Arbres tassés	
	Arbres bicolores	

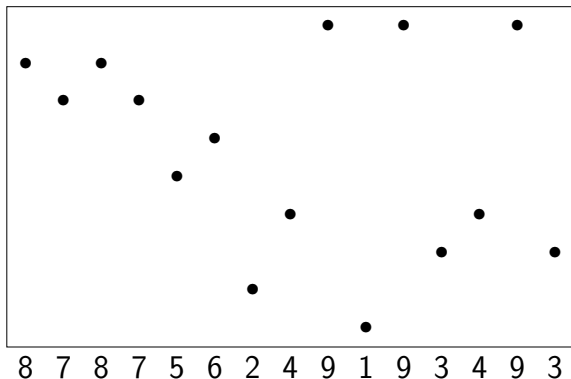
Nouvelle opération sur les mots tassés



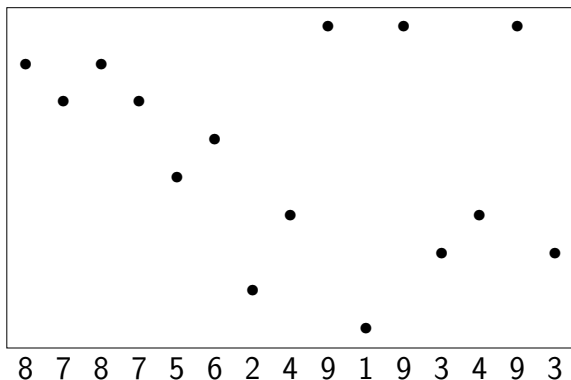
Nouvelle opération sur les mots tassés



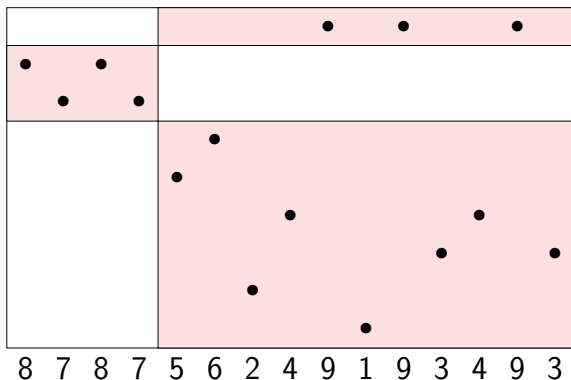
Nouvelle décomposition



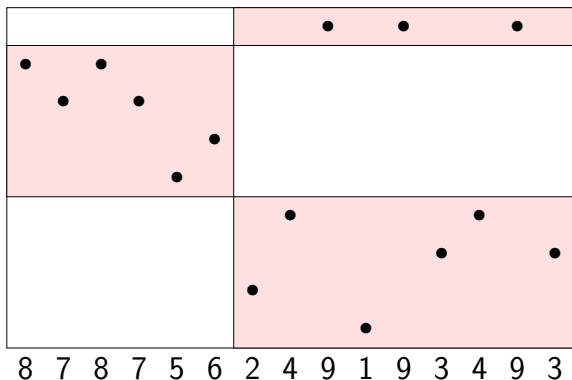
Nouvelle décomposition



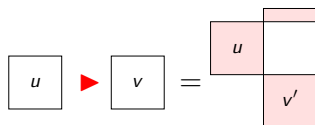
Nouvelle décomposition



Nouvelle décomposition



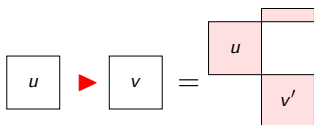
Mots tassés rouges-irréductibles



Mots tassés rouges-irréductibles [M.]

Un mot tassé irréductible w est rouge-irréductible s'il ne peut pas s'écrire $w = u \blacktriangleright v$ avec u non vide.

Mots tassés rouges-irréductibles



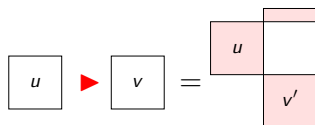
Mots tassés rouges-irréductibles [M.]

Un mot tassé irréductible w est rouge-irréductible s'il ne peut pas s'écrire $w = u \blacktriangleright v$ avec u non vide.

Lemme [M.]

Si $w = u \blacktriangleright v$ avec taille de u maximale, v est rouge-irréductible.

Mots tassés rouges-irréductibles



Mots tassés rouges-irréductibles [M.]

Un mot tassé irréductible w est rouge-irréductible s'il ne peut pas s'écrire $w = u \blacktriangleright v$ avec u non vide.

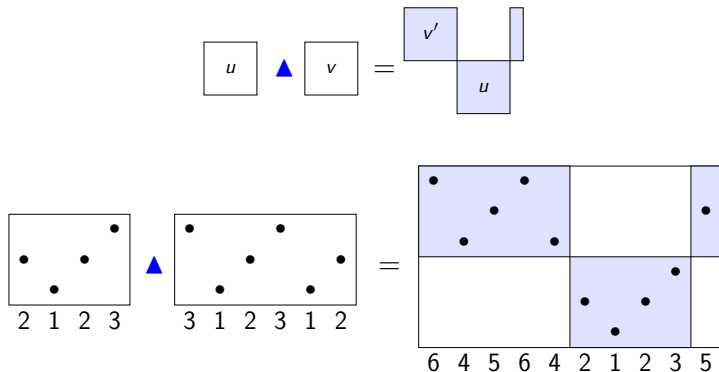
Lemme [M.]

Si $w = u \blacktriangleright v$ avec taille de u maximale, v est rouge-irréductible.

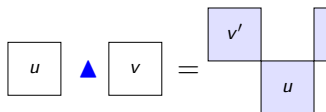
Proposition [M.]

$\dim(\mathbf{TPrim}_n) =$ nombre mots tassés rouges-irréductibles de taille n .

Nouvelle opération duale sur les mots tassés irréductible



Nouvelle opération duale sur les mots tassés irréductible



Mots tassés bleus-irréductibles [M.]

Un mot tassé irréductible w est bleu-irréductible s'il ne peut pas s'écrire $w = u \blacktriangle v$ avec u non vide.

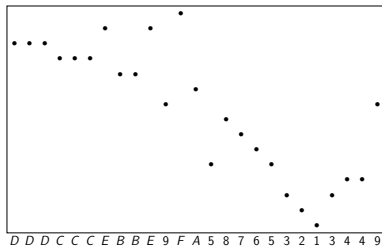
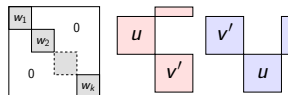
Lemme [M.]

Si $w = u \blacktriangle v$ avec taille de u maximale, v est bleu-irréductible.

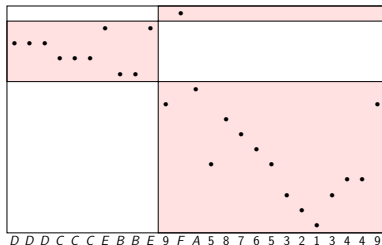
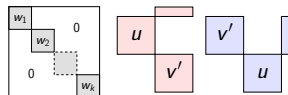
Proposition [M.]

$\dim(\mathbf{TPrim}_n) =$ nombre mots tassés bleus-irréductibles de taille n .

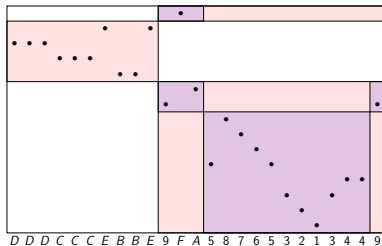
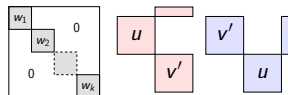
Un gros exemple



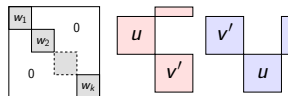
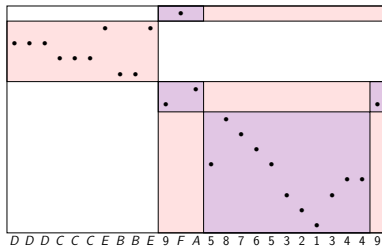
Un gros exemple



Un gros exemple

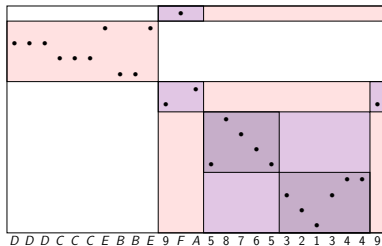
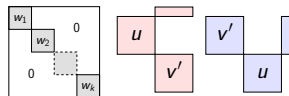


Un gros exemple



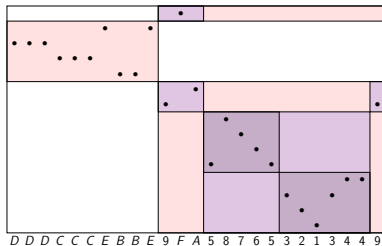
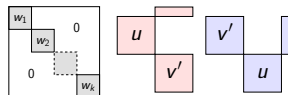
1321

Un gros exemple



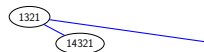
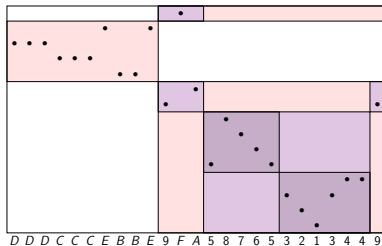
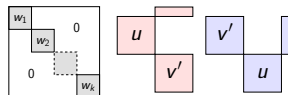
1321

Un gros exemple

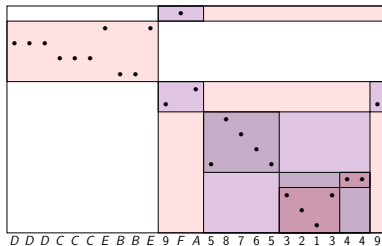
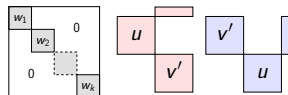


1321

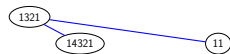
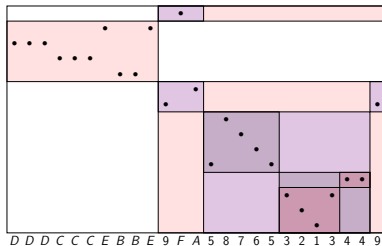
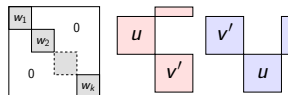
Un gros exemple



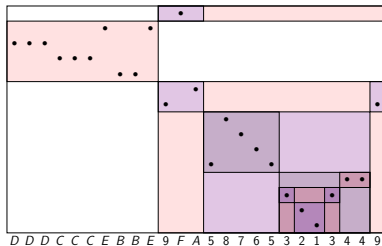
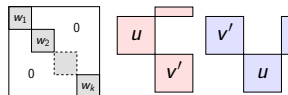
Un gros exemple



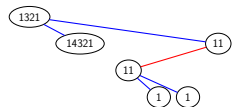
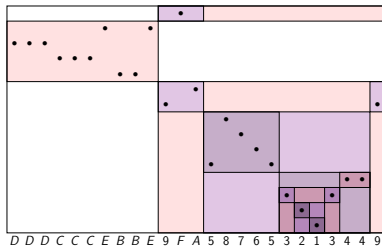
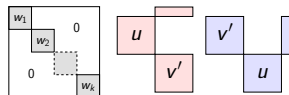
Un gros exemple



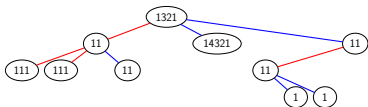
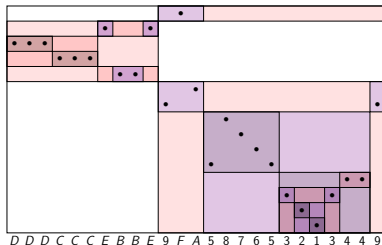
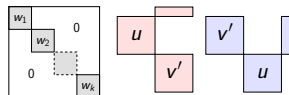
Un gros exemple



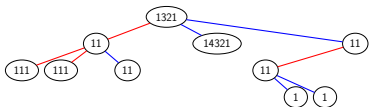
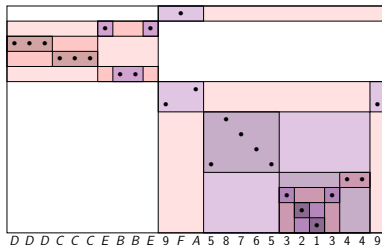
Un gros exemple



Un gros exemple

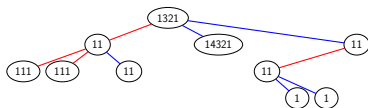
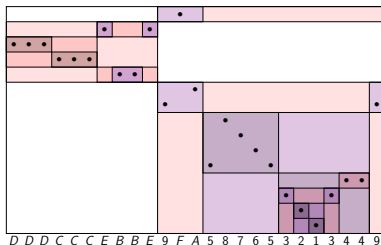


Un gros exemple



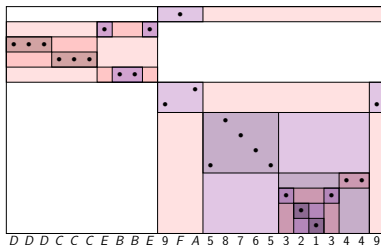
$$w = ((111/111) \blacktriangleright (11 \blacktriangle 11)) \blacktriangleright (((14321/(((1/1) \blacktriangle 11) \blacktriangleright 11)) \blacktriangle 1321)$$

Un gros exemple

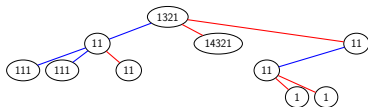
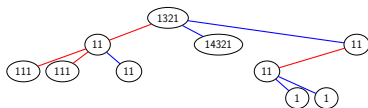


$$w = ((111/111) \blacktriangleright (11 \blacktriangle 11)) \blacktriangleright ((14321 / (((1/1) \blacktriangle 11) \blacktriangleright 11)) \blacktriangle 1321)$$

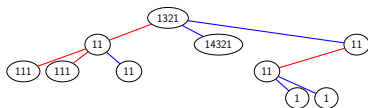
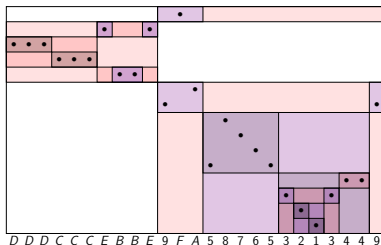
Un gros exemple



$$w = ((111/111) \blacktriangleright (11 \blacktriangleup 11)) \blacktriangleright ((14321 / (((1/1) \blacktriangleup 11) \blacktriangleright 11)) \blacktriangleup 1321)$$

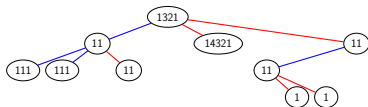


Un gros exemple

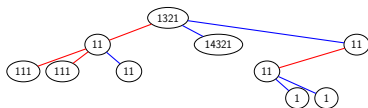
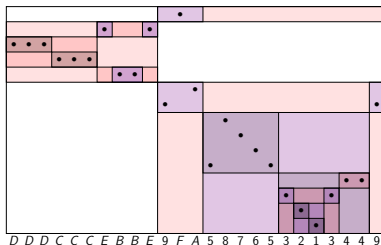


$$w = ((111/111) \blacktriangleright (11 \blacktriangle 11)) \blacktriangleright (((14321/(((1/1) \blacktriangle 11) \blacktriangleright 11)) \blacktriangle 1321)$$

$$w' = (((111/111) \blacktriangle (11 \blacktriangleright 11)) \blacktriangle (((((1/1) \blacktriangleright 11) \blacktriangle 11)/14321) \blacktriangleright 1321))$$

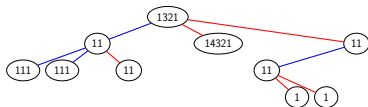
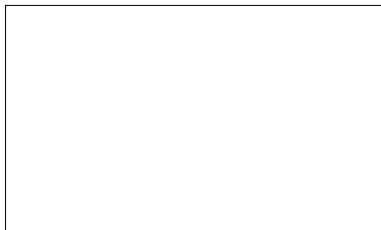


Un gros exemple

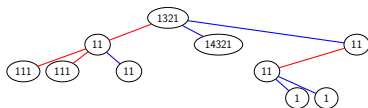
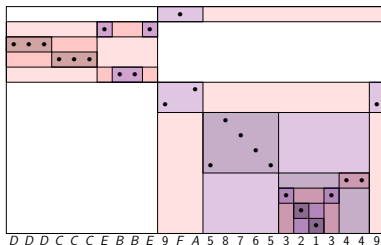


$$w = ((111/111) \blacktriangleright (11 \blacktriangle 11)) \blacktriangleright (((14321/(((1/1) \blacktriangle 11) \blacktriangleright 11)) \blacktriangle 1321)$$

$$w' = ((111/111) \blacktriangle (11 \blacktriangleright 11)) \blacktriangle (((((1/1) \blacktriangleright 11) \blacktriangle 11)/14321) \blacktriangleright 1321)$$

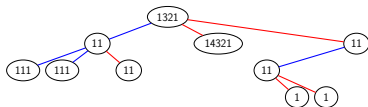
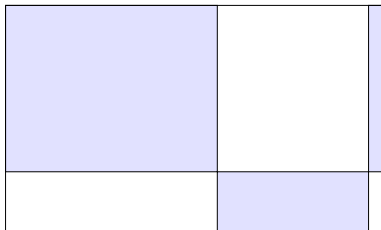


Un gros exemple

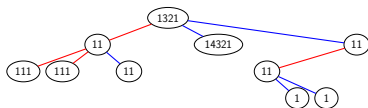
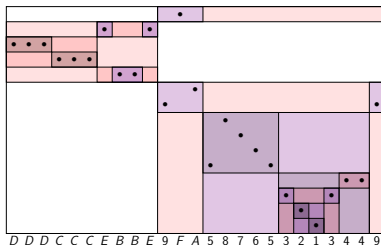


$$w = ((111/111) \blacktriangleright (11 \blacktriangle 11)) \blacktriangleright (((14321/(((1/1) \blacktriangle 11) \blacktriangleright 11)) \blacktriangle 1321)$$

$$w' = (((111/111) \blacktriangle (11 \blacktriangleright 11)) \blacktriangle (((((1/1) \blacktriangleright 11) \blacktriangle 11)/14321) \blacktriangleright 1321)$$

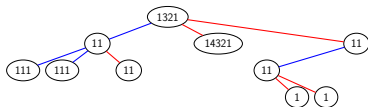
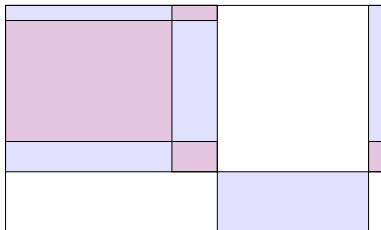


Un gros exemple

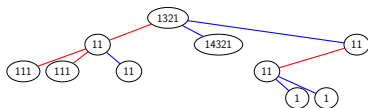
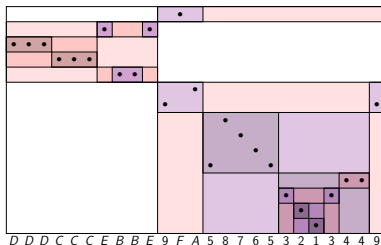


$$w = ((111/111) \blacktriangleright (11 \blacktriangle 11)) \blacktriangleright (((14321/(((1/1) \blacktriangle 11) \blacktriangleright 11)) \blacktriangle 1321)$$

$$w' = (((111/111) \blacktriangle (11 \blacktriangleright 11)) \blacktriangle (((((1/1) \blacktriangleright 11) \blacktriangle 11)/14321) \blacktriangleright 1321)$$

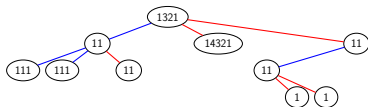
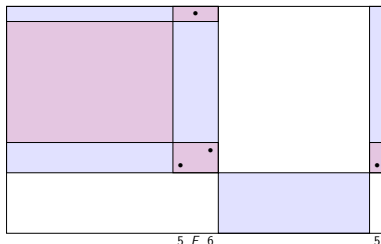


Un gros exemple

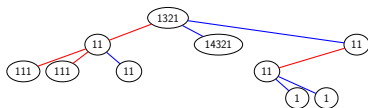
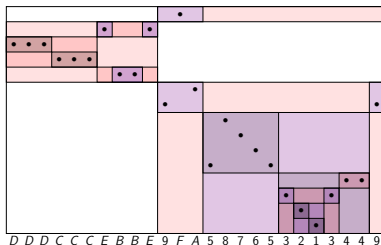


$$w = ((111/111) \blacktriangleright (11 \blacktriangle 11)) \blacktriangleright (((14321/(((1/1) \blacktriangle 11) \blacktriangleright 11)) \blacktriangle 1321)$$

$$w' = (((111/111) \blacktriangle (11 \blacktriangleright 11)) \blacktriangle (((((1/1) \blacktriangleright 11) \blacktriangle 11)/14321) \blacktriangleright 1321)$$

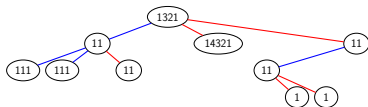
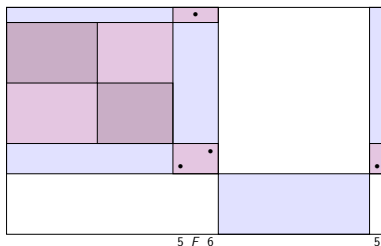


Un gros exemple

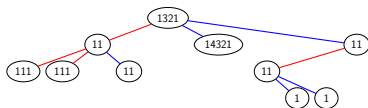
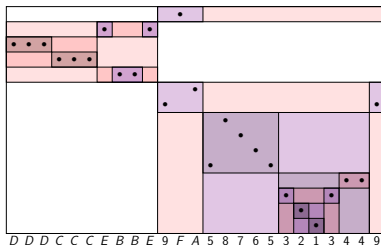


$$w = ((111/111) \blacktriangleright (11 \blacktriangle 11)) \blacktriangleright (((14321/(((1/1) \blacktriangle 11) \blacktriangleright 11)) \blacktriangle 1321)$$

$$w' = (((111/111) \blacktriangle (11 \blacktriangleright 11)) \blacktriangle (((((1/1) \blacktriangleright 11) \blacktriangle 11)/14321) \blacktriangleright 1321)$$

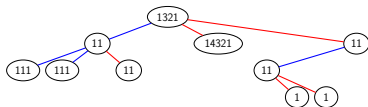
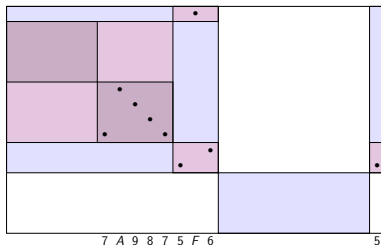


Un gros exemple

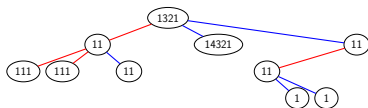
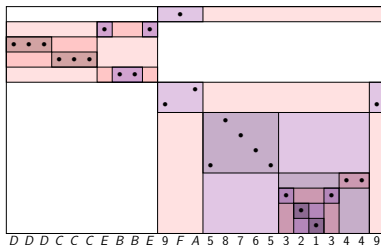


$$w = ((111/111) \blacktriangleright (11 \blacktriangle 11)) \blacktriangleright (((14321/(((1/1) \blacktriangle 11) \blacktriangleright 11)) \blacktriangle 1321)$$

$$w' = (((111/111) \blacktriangle (11 \blacktriangleright 11)) \blacktriangle (((((1/1) \blacktriangleright 11) \blacktriangle 11)/14321) \blacktriangleright 1321)$$

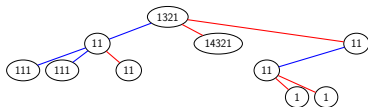
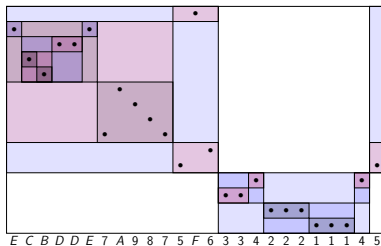


Un gros exemple



$$w = ((111/111) \blacktriangleright (11 \blacktriangle 11)) \blacktriangleright (((14321/(((1/1) \blacktriangle 11) \blacktriangleright 11)) \blacktriangle 1321)$$

$$w' = (((111/111) \blacktriangle (11 \blacktriangleright 11)) \blacktriangle (((((1/1) \blacktriangleright 11) \blacktriangle 11)/14321) \blacktriangleright 1321)$$



Théorèmes [M.]

Théorème [M.]

- $(\mathbb{O}_f)_{f \in \mathfrak{F}_{B_n}}$ base de \mathbf{WQSym}_n ,
- $(\mathbb{O}_t)_{t \in \mathfrak{T}_{B_n}}$ base de \mathbf{Prim}_n ,
- $(\mathbb{O}_t)_{t \in \mathfrak{N}_{B_n}}$ base de \mathbf{TPrim}_n .

Théorème [M.]

- $(\mathbb{P}_f)_{f \in \mathfrak{F}_{R_n}}$ base de \mathbf{WQSym}_n^* ,
- $(\mathbb{P}_t)_{t \in \mathfrak{T}_{R_n}}$ base de \mathbf{Prim}_n^* ,
- $(\mathbb{P}_t)_{t \in \mathfrak{N}_{R_n}}$ base de \mathbf{TPrim}_n^* .

Bijection [M.]

Involution grâce aux forêts bicolores.

Isomorphisme bidendriforme entre \mathbf{WQSym} et \mathbf{WQSym}^* .

Perspectives

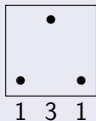
- Compatibilité avec l'inversion des permutations.

Si on prend l'inversion pour les permutations rouges-bleus-irréductibles (points fixes), on obtient l'inversion pour toutes les permutations.

Perspectives

- Compatibilité avec l'inversion des permutations.
- Généralisation de la construction des arbres biplans (**PQSym**, autres bigèbres bidendriformes).

Permutations \subset Mots tassés \subset Fonctions de parking



Perspectives

- Compatibilité avec l'inversion des permutations.
- Généralisation de la construction des arbres biplans (**PQSym**, autres bigèbres bidendriformes).
- Nouvelles applications des opérades dupliciales déformées et l'opérade de L -algèbre.

$$u/(v/w) = (u/v)/w,$$

$$u \blacktriangleright (v \blacktriangleright w) = (u/v) \blacktriangleright w,$$

$$u \blacktriangleright (v/w) = (u \blacktriangleright v)/w.$$

$$(u/v)/w = u/(v/w),$$

$$(u \blacktriangledown v) \blacktriangledown w = u \blacktriangledown (v/w),$$

$$(u/v) \blacktriangledown w = u/(v \blacktriangledown w).$$

$$u \blacktriangleright (v \blacktriangledown w) = (u \blacktriangleright v) \blacktriangledown w,$$

$$u \blacktriangleright 1 = 1 \blacktriangledown u.$$

Merci

