

Classification d'universalité pour la percolation bootstrap et les modèles avec contraintes cinétiques

Laure Marêché

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université de Strasbourg

8 juin 2022

Introduction : automates cellulaires

Automates cellulaires sur $\mathbb{Z}^2$:

Soit S un ensemble fini (*ensemble d'états*).

À chacun des éléments de $\mathbb{Z}^2$ (*sites*) on attribue un *état* dans S .

⇒ Élément de $S^{\mathbb{Z}^2}$ (*configuration*).

À chaque temps, on modifie l'état de chaque site en fonction des états des sites alentour.

Percolation bootstrap = classe d'automates cellulaires.

Modèles avec contraintes cinétiques = classe de modèles proches.

Introduction : percolation bootstrap et modèles avec contraintes cinétiques

Ensemble d'états $S = \{0, 1\}$.

Percolation bootstrap : un site à 0 reste à 0 et un site à 1 passe à 0 **quand une contrainte est satisfaite en ce site.**

⇒ Monotone et déterministe.

Modèles avec contraintes cinétiques : tout site passe à 0 avec probabilité q et à 1 avec probabilité $1 - q$ **quand la contrainte est satisfaite en ce site.**

⇒ Version non monotone et aléatoire de la percolation bootstrap.

Contrainte en un site de la forme « il y a assez de sites à 0 aux alentours de ce site ».

Introduction : classification d'universalité

Il y a une infinité de contraintes possibles.

Le comportement dépend du choix de la contrainte.

⇒ A-t-on une classification des contraintes en un nombre fini de catégories telle que des contraintes de la même catégorie induisent le même comportement ?

Une telle classification se nomme *classification d'universalité*.

Définition d'une contrainte

On est sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$.

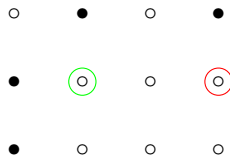
Soit $\mathcal{U}$ une *famille de mise à jour*, i.e. $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_m\}$ avec $U_i \subset \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ finis non vides.

La contrainte en un site x est satisfaite si et seulement si l'un des $x + U_i$ ne contient que des zéros.

Exemple :

le modèle Est en dimension 2,

$$\mathcal{U} = \{\{(-1, 0)\}, \{(0, -1)\}\}$$



● = site à 0, ○ = site à 1

Définition de la percolation bootstrap

Dynamique sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ à temps discret.

Soit $\{U_1, \dots, U_m\}$ une famille de mise à jour.

Pour tout $t \in \mathbb{N}^*$,

- les sites à 0 au temps $t - 1$ restent à 0 au temps t ;
- un site x à 1 au temps $t - 1$ passe à 0 au temps t **si et seulement si l'un des $x + U_i$ ne contient que des zéros au temps $t - 1$.**

Configuration initiale aléatoire de loi notée μ sous laquelle :

- tous les sites sont indépendants,
- $\forall x \in \mathbb{Z}^2, \begin{cases} \mathbb{P}(x \text{ est à } 0) = q, \\ \mathbb{P}(x \text{ est à } 1) = 1 - q, \end{cases}$

avec $q \in [0, 1]$ fixé.

La dynamique met-elle l'origine à 0 avec probabilité 1 ?

Propriété

Il existe $q_c \in [0, 1]$ tel que :

- si $q < q_c$, $\mathbb{P}(\text{la dynamique met l'origine à } 0) < 1$;
- si $q > q_c$, $\mathbb{P}(\text{la dynamique met l'origine à } 0) = 1$.

$\Rightarrow$ Valeur de q_c ?

On définit τ^{BP} le premier temps auquel l'origine est à 0.

$\Rightarrow$ Comportement de τ^{BP} quand $q \rightarrow q_c$?

On note T^{BP} la médiane de τ^{BP} .

Classification d'universalité pour la percolation bootstrap

Théorème (Bollobás, Smith, Uzzell, 2015 + Bollobás, Duminil-Copin, Morris, Smith, 2014 + Balister, Bollobás, Przykucki, Smith, 2016)

Les contraintes se répartissent en trois classes :

- *surcritiques*, pour lesquelles $q_c = 0$ et $T^{BP} = (\frac{1}{q})^{\Theta(1)}$ quand $q \rightarrow 0$;
- *critiques*, pour lesquelles $q_c = 0$ et $T^{BP} = \exp((\frac{1}{q})^{\alpha+o(1)})$ quand $q \rightarrow 0$, où α est la *difficulté* de la contrainte ;
- *sous-critiques*, pour lesquelles $q_c > 0$.

Heuristique pour la percolation bootstrap surcritique et critique



Heuristique pour la percolation bootstrap surcritrique et critique



Heuristique pour la percolation bootstrap surcritique et critique

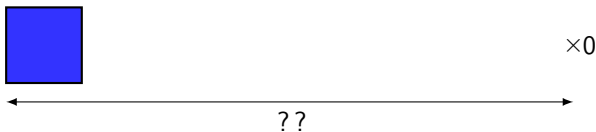


Heuristique pour la percolation bootstrap surcritrique et critique

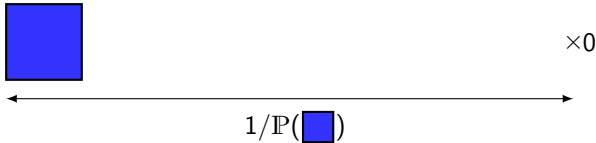


$$q_c = 0.$$

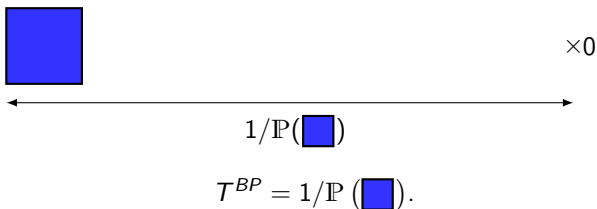
Heuristique pour la percolation bootstrap surcritrique et critique



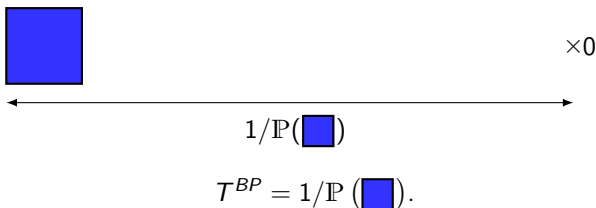
Heuristique pour la percolation bootstrap surcritrique et critique



Heuristique pour la percolation bootstrap surcritrique et critique



Heuristique pour la percolation bootstrap surcritique et critique



- contraintes surcritiques :

$$\blacksquare \text{ de } \Theta(1) \text{ sites} \Rightarrow \mathbb{P}(\blacksquare) = q^{\Theta(1)}.$$
$$\Rightarrow T^{BP} = 1/q^{\Theta(1)}.$$

- contraintes critiques :

$$\blacksquare \text{ de } \Theta(1/q^\alpha) \text{ sites} \Rightarrow \mathbb{P}(\blacksquare) = q^{\Theta(1/q^\alpha)} = \exp(-1/q^{\alpha+o(1)}).$$
$$\Rightarrow T^{BP} = \exp(1/q^{\alpha+o(1)}).$$

Définition des modèles avec contraintes cinétiques

Intuitivement : tout site passe à 0 avec probabilité q et à 1 avec probabilité $1 - q$ **quand la contrainte est satisfaite en ce site**.

Pour chaque site, les tentatives de changement d'état ont lieu à des temps aléatoires de loi continue.

Dynamique à temps continu sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$.

Soient $\{U_1, \dots, U_m\}$ une famille de mise à jour et $q \in [0, 1]$.

Construction : Indépendamment pour tout $x \in \mathbb{Z}^2$, on se donne :

- $(e_{x,k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ indépendantes de loi Exponentielle(1),
- $(B_{x,k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ indépendantes de loi Bernoulli($1 - q$) indépendantes de $(e_{x,k})_{k \in \mathbb{N}^*}$.

Pour tous $x \in \mathbb{Z}^2$, $k \in \mathbb{N}^*$, au temps $\sum_{\ell=1}^k e_{x,\ell}$, **si l'un des $x + U_i$ ne contient que des zéros**, on remplace l'état de x par $B_{x,k}$.

Configuration initiale aléatoire de loi μ .

Quantité d'intérêt pour les modèles avec contraintes cinétiques

On définit τ^{KCM} le premier temps auquel l'origine est à 0.

$\Rightarrow$ Comportement de τ^{KCM} quand $q \rightarrow q_c$?

On a toujours

$$\mathbb{E}(\tau^{KCM}) = \Omega(T^{BP}) \text{ quand } q \rightarrow q_c.$$

$\Rightarrow$ A-t-on $\mathbb{E}(\tau^{KCM}) = \Theta(T^{BP})$ quand $q \rightarrow q_c$?

Résultat d'universalité pour les modèles avec contraintes cinétiques surcritiques

$$q_c = 0, T^{BP} = (\frac{1}{q})^{\Theta(1)} \text{ quand } q \rightarrow 0.$$

Théorème (M., Martinelli, Toninelli, 2020 + Martinelli, Morris, Toninelli, 2019)

Les contraintes surcritiques se répartissent en deux classes :

- *non enracinées*, pour lesquelles $\mathbb{E}(\tau^{KCM}) = (\frac{1}{q})^{\Theta(1)}$ quand $q \rightarrow 0$;
- *enracinées*, pour lesquelles $\mathbb{E}(\tau^{KCM}) = (\frac{1}{q})^{\Theta(\ln(1/q))}$ quand $q \rightarrow 0$.

Résultat d'universalité pour les modèles avec contraintes cinétiques critiques

$$q_c = 0, T^{BP} = \exp\left(\left(\frac{1}{q}\right)^{\alpha+o(1)}\right) \text{ quand } q \rightarrow 0.$$

Théorème (Hartarsky, M., Toninelli, 2020 + Martinelli, Morris, Toninelli, 2019 + Hartarsky, Martinelli, Toninelli, 2021)

Les contraintes critiques se répartissent en deux classes :

- avec un nombre fini de directions stables, pour lesquelles $\mathbb{E}(\tau^{KCM}) = \exp\left(\left(\frac{1}{q}\right)^{\alpha+o(1)}\right)$ quand $q \rightarrow 0$;
- avec un nombre infini de directions stables, pour lesquelles $\mathbb{E}(\tau^{KCM}) = \exp\left(\left(\frac{1}{q}\right)^{2\alpha+o(1)}\right)$ quand $q \rightarrow 0$.

Hartarsky, Marêché 2022 + Hartarsky 2021 :
 $\exp\left(\left(\frac{1}{q}\right)^{\beta+o(1)}\right) \rightarrow \exp\left(\left(\frac{1}{q}\right)^\beta (\ln\left(\frac{1}{q}\right))^\gamma\right).$

Heuristique pour les modèles avec contraintes cinétiques



$\times 0$

Heuristique pour les modèles avec contraintes cinétiques



Heuristique pour les modèles avec contraintes cinétiques



Barrière d'énergie : pour mettre l'origine à 0, il faut passer par une configuration contenant beaucoup de 0.

⇒ Configuration très improbable.

⇒ Ça prend beaucoup de temps.

Heuristique pour les modèles avec contraintes cinétiques



Heuristique pour les modèles avec contraintes cinétiques



Heuristique pour les modèles avec contraintes cinétiques



Heuristique pour les modèles avec contraintes cinétiques



Heuristique pour les modèles avec contraintes cinétiques

 $\rightarrow$  possible.

Surcritiques non enracinés

Critiques avec un nombre fini de directions stables



$\times 0$

$\Rightarrow$ Configuration de probabilité $\mathbb{P}(\text{Diagram of two adjacent blue squares}) = \mathbb{P}(\text{Diagram of a single blue square})^2$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = 1/\mathbb{P}(\text{Diagram of a single blue square})^2$.

- Surcritiques non enracinés : $\mathbb{P}(\text{Diagram of a single blue square}) = q^{\Theta(1)}$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = 1/q^{\Theta(1)}$.

- Critiques avec un nombre fini de directions stables :

$\mathbb{P}(\text{Diagram of a single blue square}) = \exp(-1/q^{\alpha+o(1)})$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = \exp(1/q^{\alpha+o(1)})$.

Heuristique pour les modèles avec contraintes cinétiques

 $\rightarrow$  possible.

Surcritiques non enracinés

Critiques avec un nombre fini de directions stables



$\times 0$

$\Rightarrow$ Configuration de probabilité $\mathbb{P}(\text{Diagram of two adjacent blue squares}) = \mathbb{P}(\text{Diagram of a single blue square})^2$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = 1/\mathbb{P}(\text{Diagram of a single blue square})^2$.

- Surcritiques non enracinés : $\mathbb{P}(\text{Diagram of a single blue square}) = q^{\Theta(1)}$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = 1/q^{\Theta(1)}$.

- Critiques avec un nombre fini de directions stables :

$\mathbb{P}(\text{Diagram of a single blue square}) = \exp(-1/q^{\alpha+o(1)})$.

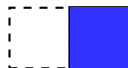
$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = \exp(1/q^{\alpha+o(1)})$.

Heuristique pour les modèles avec contraintes cinétiques

 $\rightarrow$  possible.

Surcritiques non enracinés

Critiques avec un nombre fini de directions stables

 $\times 0$

$\Rightarrow$ Configuration de probabilité $\mathbb{P}(\text{) = \mathbb{P}(\text{)^2$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = 1/\mathbb{P}(\text{)^2$.

- Surcritiques non enracinés : $\mathbb{P}(\text{) = q^{\Theta(1)}$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = 1/q^{\Theta(1)}$.

- Critiques avec un nombre fini de directions stables :

$\mathbb{P}(\text{) = \exp(-1/q^{\alpha+o(1)})$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = \exp(1/q^{\alpha+o(1)})$.

Heuristique pour les modèles avec contraintes cinétiques

 $\rightarrow$  possible.

Surcritiques non enracinés

Critiques avec un nombre fini de directions stables



$\times 0$

$\Rightarrow$ Configuration de probabilité $\mathbb{P}(\text{Diagram of two adjacent blue squares}) = \mathbb{P}(\text{Diagram of a single blue square})^2$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = 1/\mathbb{P}(\text{Diagram of a single blue square})^2$.

- Surcritiques non enracinés : $\mathbb{P}(\text{Diagram of a single blue square}) = q^{\Theta(1)}$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = 1/q^{\Theta(1)}$.

- Critiques avec un nombre fini de directions stables :

$\mathbb{P}(\text{Diagram of a single blue square}) = \exp(-1/q^{\alpha+o(1)})$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = \exp(1/q^{\alpha+o(1)})$.

Heuristique pour les modèles avec contraintes cinétiques

 $\rightarrow$  possible.

Surcritiques non enracinés

Critiques avec un nombre fini de directions stables

 $\times 0$

$\Rightarrow$ Configuration de probabilité $\mathbb{P}(\text{) = \mathbb{P}(\text{)^2$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = 1/\mathbb{P}(\text{)^2$.

- Surcritiques non enracinés : $\mathbb{P}(\text{) = q^{\Theta(1)}$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = 1/q^{\Theta(1)}$.

- Critiques avec un nombre fini de directions stables :

$\mathbb{P}(\text{) = \exp(-1/q^{\alpha+o(1)})$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = \exp(1/q^{\alpha+o(1)})$.

Heuristique pour les modèles avec contraintes cinétiques

 $\rightarrow$  possible.

Surcritiques non enracinés

Critiques avec un nombre fini de directions stables



$\times 0$

$\Rightarrow$ Configuration de probabilité $\mathbb{P}(\text{Diagram of two adjacent blue squares}) = \mathbb{P}(\text{Diagram of a single blue square})^2$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = 1/\mathbb{P}(\text{Diagram of a single blue square})^2$.

- Surcritiques non enracinés : $\mathbb{P}(\text{Diagram of a single blue square}) = q^{\Theta(1)}$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = 1/q^{\Theta(1)}$.

- Critiques avec un nombre fini de directions stables :

$\mathbb{P}(\text{Diagram of a single blue square}) = \exp(-1/q^{\alpha+o(1)})$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = \exp(1/q^{\alpha+o(1)})$.

Heuristique pour les modèles avec contraintes cinétiques

 $\rightarrow$  possible.

Surcritiques non enracinés

Critiques avec un nombre fini de directions stables

 $\times 0$

$\Rightarrow$ Configuration de probabilité $\mathbb{P}(\text{Diagram of two adjacent blue squares}) = \mathbb{P}(\text{Diagram of a single blue square})^2$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = 1/\mathbb{P}(\text{Diagram of a single blue square})^2$.

- Surcritiques non enracinés : $\mathbb{P}(\text{Diagram of a single blue square}) = q^{\Theta(1)}$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = 1/q^{\Theta(1)}$.

- Critiques avec un nombre fini de directions stables :

$\mathbb{P}(\text{Diagram of a single blue square}) = \exp(-1/q^{\alpha+o(1)})$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = \exp(1/q^{\alpha+o(1)})$.

Heuristique pour les modèles avec contraintes cinétiques

 $\rightarrow$  possible.

Surcritiques non enracinés

Critiques avec un nombre fini de directions stables

 $\times 0$

$\Rightarrow$ Configuration de probabilité $\mathbb{P}(\text{) = \mathbb{P}(\text{)^2$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = 1/\mathbb{P}(\text{)^2$.

- Surcritiques non enracinés : $\mathbb{P}(\text{) = q^{\Theta(1)}$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = 1/q^{\Theta(1)}$.

- Critiques avec un nombre fini de directions stables :

$\mathbb{P}(\text{) = \exp(-1/q^{\alpha+o(1)})$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = \exp(1/q^{\alpha+o(1)})$.

Heuristique pour les modèles avec contraintes cinétiques

 $\rightarrow$  possible.

Surcritiques non enracinés

Critiques avec un nombre fini de directions stables



$\Rightarrow$ Configuration de probabilité $\mathbb{P}(\text{) = \mathbb{P}(\text{)^2$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = 1/\mathbb{P}(\text{)^2$.

- Surcritiques non enracinés : $\mathbb{P}(\text{) = q^{\Theta(1)}$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = 1/q^{\Theta(1)}$.

- Critiques avec un nombre fini de directions stables :

$\mathbb{P}(\text{) = \exp(-1/q^{\alpha+o(1)})$.

$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = \exp(1/q^{\alpha+o(1)})$.

Heuristique pour les modèles avec contraintes cinétiques

$$\blacksquare\blacksquare \rightarrow \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} \text{ impossible.}$$

Surcritiques enracinés.

Critiques avec un nombre infini de directions stables.

Pour mettre l'origine à 0, la dynamique doit passer par une configuration avec au moins n $\blacksquare$, où $n = \Theta(\ln(\text{distance de l'origine au } \blacksquare \text{ initial le plus proche})) = \Theta(\ln(1/\mathbb{P}(\blacksquare)))$.

$$\Rightarrow \text{Configuration de probabilité } \mathbb{P}(\blacksquare)^n = \mathbb{P}(\blacksquare)^{\Theta(\ln(1/\mathbb{P}(\blacksquare)))}.$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = 1/\mathbb{P}(\blacksquare)^{\Theta(\ln(1/\mathbb{P}(\blacksquare)))}.$$

- Surcritiques enracinés : $\mathbb{P}(\blacksquare) = q^{\Theta(1)}$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = (1/q)^{\Theta(\ln(1/q))}.$$

- Critiques avec un nombre infini de directions stables :

$$\mathbb{P}(\blacksquare) = \exp(-1/q^{\alpha+o(1)}).$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\tau^{KCM}) = \exp(1/q^{2\alpha+o(1)}).$$

La classification d'universalité de la percolation bootstrap est pertinente pour les modèles avec contraintes cinétiques.

MAIS barrières d'énergie $\Rightarrow$ différences entre les deux classes de modèles.

$\Rightarrow$ Raffinement de la classification pour les modèles avec contraintes cinétiques.

- Modèles sous-critiques ?
- Dimension plus grande ?

Merci de votre attention.

Universalité pour la percolation bootstrap critique : logarithmes

On peut faire mieux que $T^{BP} = \exp((\frac{1}{q})^{\alpha+o(1)})$!

Théorème (Bollobás, Duminil-Copin, Morris, Smith, 2014)

Les contraintes critiques se subdivisent en :

- *équilibrées*, pour lesquelles $T^{BP} = \exp(\Theta((\frac{1}{q})^\alpha))$ quand $q \rightarrow 0$;
- *déséquilibrées*, pour lesquelles $T^{BP} = \exp(\Theta((\frac{1}{q})^\alpha \ln(\frac{1}{q})^2))$ quand $q \rightarrow 0$.

Universalité pour les modèles avec contraintes cinétiques critiques avec un nombre infini de directions stables

$$\mathbb{E}(\tau^{KCM}) = \exp\left(\left(\frac{1}{q}\right)^{2\alpha+o(1)}\right) \text{ quand } q \rightarrow 0.$$

Théorème (Hartarsky, M., 2020 + Martinelli, Morris, Toninelli, 2019 + Hartarsky, 2021)

Les contraintes critiques avec un nombre infini de directions stables vérifient :

- si elles sont équilibrées, $\mathbb{E}(\tau^{KCM}) = \exp(\Theta((\frac{1}{q})^{2\alpha}))$ quand $q \rightarrow 0$;
- si elles sont déséquilibrées, $\mathbb{E}(\tau^{KCM}) = \exp(\Theta((\frac{1}{q})^{2\alpha} \ln(\frac{1}{q})^4))$ quand $q \rightarrow 0$.

Universalité pour les modèles avec contraintes cinétiques critiques avec un nombre fini de directions stables

$$\mathbb{E}(\tau^{KCM}) = \exp((\frac{1}{q})^{\alpha+o(1)}) \text{ quand } q \rightarrow 0.$$

Théorème (Hartarsky, M., 2020 + Hartarsky, Martinelli, Toninelli, 2019 + Hartarsky, 2021)

Les contraintes critiques avec un nombre fini de directions stables vérifient :

- si elles sont équilibrées, elles se subdivisent en
 - *isotropes*, pour lesquelles $\mathbb{E}(\tau^{KCM}) = \exp(\Theta((\frac{1}{q})^\alpha))$ quand $q \rightarrow 0$;
 - *semi-dirigées*, pour lesquelles $\mathbb{E}(\tau^{KCM}) = \exp(\Theta((\frac{1}{q})^\alpha \ln(\ln(\frac{1}{q}))))$ quand $q \rightarrow 0$;
 - *enracinées*, pour lesquelles $\mathbb{E}(\tau^{KCM}) = \exp(\Theta((\frac{1}{q})^\alpha \ln(\frac{1}{q})))$ quand $q \rightarrow 0$;
- si elles sont déséquilibrées, elles se subdivisent en
 - *non enracinées*, pour lesquelles $\mathbb{E}(\tau^{KCM}) = \exp(\Theta((\frac{1}{q})^\alpha \ln(\frac{1}{q})^2))$ quand $q \rightarrow 0$;
 - *enracinées*, pour lesquelles $\mathbb{E}(\tau^{KCM}) = \exp(\Theta((\frac{1}{q})^\alpha \ln(\frac{1}{q})^3))$ quand $q \rightarrow 0$.