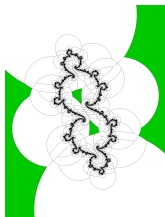


(publicité)

école de Printemps "Mathématiques Expérimentales 2018"



<https://mathexp2018.sciencesconf.org/>

- École (21-25 mai)
avec les cours de A. Busic, X. Goaoc, M. Rao, B. Salvy
- Atelier (28 mai - 1 juin)

Quadrangulations et valeurs zêta multiples

Vincent Delecroix (avec É. Goujard, P. Zograf et A. Zorich)

LaBRI, Bordeaux

JCB 2018

Ce que l'on compte

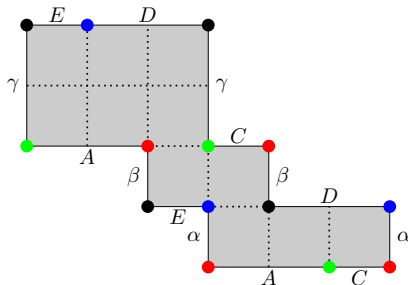
On fixe $g \geq 0$ (le genre). On s'intéresse aux *surfaces à petits carreaux de genre g* . Ce sont les quadrangulations dont

- le genre est g ,
- les côtés horizontaux/verticaux sont collés entre eux,
- les sommets sont de valence au moins 4.

Ce que l'on compte

On fixe $g \geq 0$ (le genre). On s'intéresse aux *surfaces à petits carreaux de genre g* . Ce sont les quadrangulations dont

- le genre est g ,
- les côtés horizontaux/verticaux sont collés entre eux,
- les sommets sont de valence au moins 4.

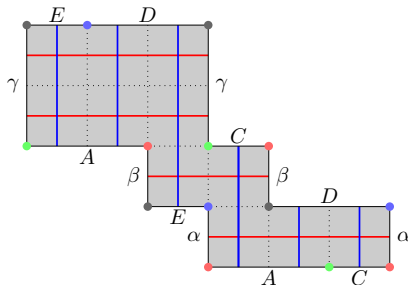


Un exemple avec $g = 2$ et 11 carreaux.

Ce que l'on compte

On fixe $g \geq 0$ (le genre). On s'intéresse aux *surfaces à petits carreaux de genre g* . Ce sont les quadrangulations dont

- le genre est g ,
- les côtés horizontaux/verticaux sont collés entre eux,
- les sommets sont de valence au moins 4.

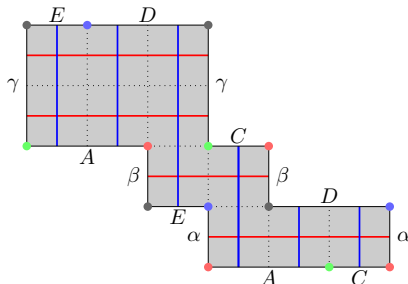


Un exemple avec $g = 2$ et 11 carreaux.

Ce que l'on compte

On fixe $g \geq 0$ (le genre). On s'intéresse aux *surfaces à petits carreaux de genre g* . Ce sont les quadrangulations dont

- le genre est g ,
- les côtés horizontaux/verticaux sont collés entre eux,
- les sommets sont de valence au moins 4.



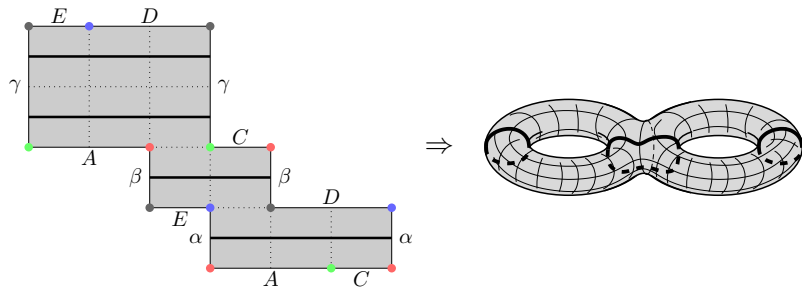
Un exemple avec $g = 2$ et 11 carreaux. Combien de surfaces à 11 carreaux ?

Raffinement 1 : multi-courbe γ fixée

On considère des sous-familles de surfaces à petits carreaux obtenues en fixant la classe de la multi-courbe horizontale.

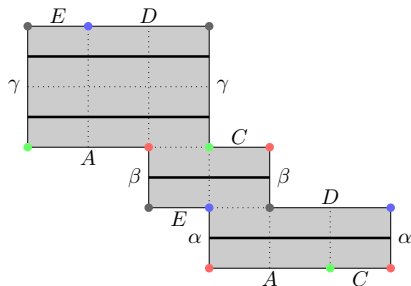
Raffinement 1 : multi-courbe γ fixée

On considère des sous-familles de surfaces à petits carreaux obtenues en fixant la classe de la multi-courbe horizontale.

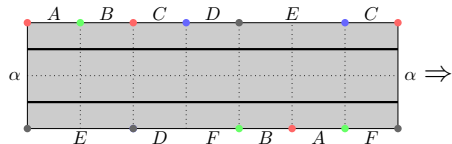
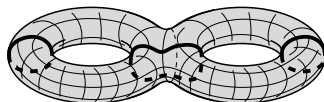


Raffinement 1 : multi-courbe γ fixée

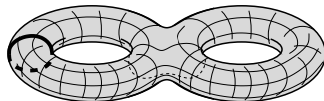
On considère des sous-familles de surfaces à petits carreaux obtenues en fixant la classe de la multi-courbe horizontale.



$\Rightarrow$

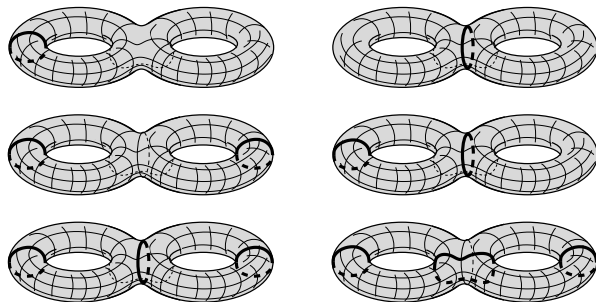


$\Rightarrow$



Raffinement 1 : multi-courbe γ fixée

En genre 2, on a 6 multi-courbes possibles.



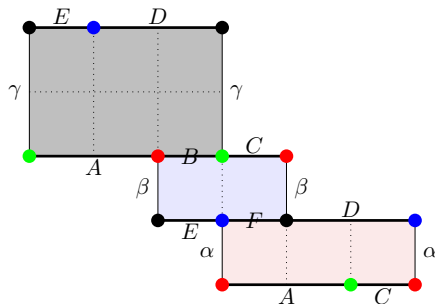
Raffinement 2 : diagramme de séparatrices D fixé

Un *diagramme de séparatrices* encode la combinatoire de recollement des cylindres d'une surface à petits carreaux.

Raffinement 2 : diagramme de séparatrices D fixé

Un *diagramme de séparatrices* encode la combinatoire de recollement des cylindres d'une surface à petits carreaux.

Exemple

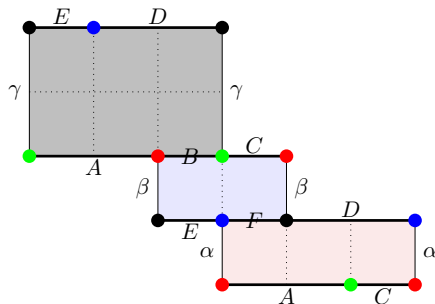


s'encode comme $(AC, DF), (EF, CB), (AB, DE)$.

Raffinement 2 : diagramme de séparatrices D fixé

Un *diagramme de séparatrices* encode la combinatoire de recollement des cylindres d'une surface à petits carreaux.

Exemple



s'encode comme $(AC, DF), (EF, CB), (AB, DE)$.

A une multi-courbe γ correspond une famille (finie) de diagramme de séparatrices.

Valeurs zêta multiples (généralisées)

Une *valeur zêta multiple généralisée* est une somme de la forme

$$\sum_{h_1, h_2, \dots, h_k \geq 1} \frac{1}{L_1(h)L_2(h) \dots L_d(h)}$$

où les $L_i(h) = L_i(h_1, \dots, h_k)$ sont des formes linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ (e.g. h_1 ou $h_1 + 3h_3 + h_4$).

Valeurs zêta multiples (généralisées)

Une *valeur zêta multiple généralisée* est une somme de la forme

$$\sum_{h_1, h_2, \dots, h_k \geq 1} \frac{1}{L_1(h)L_2(h) \dots L_d(h)}$$

où les $L_i(h) = L_i(h_1, \dots, h_k)$ sont des formes linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ (e.g. h_1 ou $h_1 + 3h_3 + h_4$).

Pour $s_1, \dots, s_k$ entiers positifs, la valeur zêta multiple est

$$\zeta(s_1, s_2, \dots, s_k) := \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_k > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_k^{s_k}}$$

Valeurs zêta multiples (généralisées)

Une *valeur zêta multiple généralisée* est une somme de la forme

$$\sum_{h_1, h_2, \dots, h_k \geq 1} \frac{1}{L_1(h)L_2(h) \dots L_d(h)}$$

où les $L_i(h) = L_i(h_1, \dots, h_k)$ sont des formes linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ (e.g. h_1 ou $h_1 + 3h_3 + h_4$).

Pour $s_1, \dots, s_k$ entiers positifs, la valeur zêta multiple est

$$\begin{aligned} \zeta(s_1, s_2, \dots, s_k) &:= \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_k > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_k^{s_k}} \\ &= \sum_{h_1, \dots, h_k \in \mathbb{Z}_{>0}^k} \frac{1}{(h_1 + h_2 + \dots + h_k)(h_2 + \dots + h_k) \dots (h_k)}. \end{aligned}$$

Deux résultats asymptotiques

Théorème (DGZZ)

Pour un diagramme de séparatrices D , l'asymptotique des surfaces à petits carreaux de genre g , diagramme D et au plus N carreaux est équivalent à cN^d où $d = 6g - 6$ et c est une combinaison linéaire à coefficients rationnels de valeur zêta multiples généralisées.

Théorème (DGZZ)

Pour une multi-courbe γ , l'asymptotique des surfaces à petits carreaux de genre g , multi-courbe γ et au plus N carreaux est équivalent à cN^{6g-6} où $c \in \mathbb{Q}\pi^{6g-6}$.

Stratégie de la preuve (étape 1)

Étant donné un diagramme de séparatrices D avec k cylindres, on introduit une série génératrice des longueurs

$$F_D(x_1, \dots, x_k) = \sum f_D(b_1, \dots, b_k) x_1^{b_1} \dots x_k^{b_k} \text{ où}$$

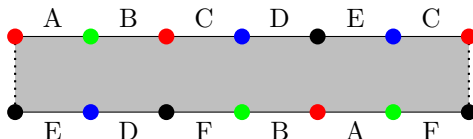
$$f_D(b_1, \dots, b_k) := \#\{\text{long. conn. de selles avec périmètres } b_1, \dots, b_k\}.$$

Stratégie de la preuve (étape 1)

$$f_D(b_1, \dots, b_k) = \#\{\text{long. conn. de selles avec périmètres } b_1, \dots, b_k\}$$

$$F_D(x_1, \dots, x_k) = \sum f_D(b_1, \dots, b_k) x_1^{b_1} \dots x_k^{b_k}.$$

Exemple 1 :



$$f_D(b_1) = \#\{(y_A, y_B, y_C, y_D, y_E, y_F) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^6 :$$

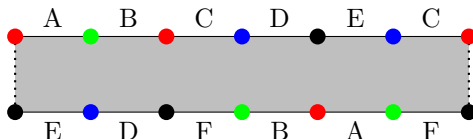
$$y_A + y_B + 2y_C + y_D + y_E = y_E + y_D + 2y_F + y_B + y_A = b_1\}$$

Stratégie de la preuve (étape 1)

$$f_D(b_1, \dots, b_k) = \#\{\text{long. conn. de selles avec périmètres } b_1, \dots, b_k\}$$

$$F_D(x_1, \dots, x_k) = \sum f_D(b_1, \dots, b_k) x_1^{b_1} \dots x_k^{b_k}.$$

Exemple 1 :



$$f_D(b_1) = \#\{(y_A, y_B, y_C, y_D, y_E, y_F) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^6 :$$

$$y_A + y_B + 2y_C + y_D + y_E = y_E + y_D + 2y_F + y_B + y_A = b_1\}$$

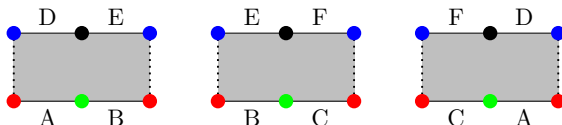
$$F_D(x_1) = \frac{1}{(1-x_1)^4(1-x_1^2)} = 1 + 4x_1 + 11x_1^2 + 24x_1^3 + 46x_1^4 + \dots$$

Stratégie de la preuve (étape 1)

$$f_D(b_1, \dots, b_k) = \#\{\text{long. conn. de selles avec périmètres } b_1, \dots, b_k\}$$

$$F_D(x_1, \dots, x_k) = \sum f_D(b_1, \dots, b_k) x_1^{b_1} \dots x_k^{b_k}.$$

Exemple 2 :



$$f_D(b_1, b_2, b_3) = \#\{(y_A, y_B, y_C, y_D, y_E, y_F) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^6 :$$

$$y_A + y_B = y_D + y_E = b_1$$

$$y_B + y_C = y_E + y_F = b_2$$

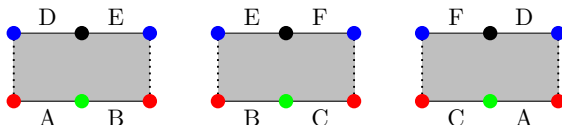
$$y_C + y_A = y_F + y_D = b_3\}$$

Stratégie de la preuve (étape 1)

$$f_D(b_1, \dots, b_k) = \#\{\text{long. conn. de selles avec périmètres } b_1, \dots, b_k\}$$

$$F_D(x_1, \dots, x_k) = \sum f_D(b_1, \dots, b_k) x_1^{b_1} \dots x_k^{b_k}.$$

Exemple 2 :



$$f_D(b_1, b_2, b_3) = \#\{(y_A, y_B, y_C, y_D, y_E, y_F) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^6 :$$

$$y_A + y_B = y_D + y_E = b_1$$

$$y_B + y_C = y_E + y_F = b_2$$

$$y_C + y_A = y_F + y_D = b_3\}$$

$$F_D(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{(1 - x_1 x_2)(1 - x_2 x_3)(1 - x_3 x_1)}.$$

Stratégie de la preuve (étape 1)

$$f_D(b_1, \dots, b_k) = \#\{\text{long. conn. de selles avec périmètres } b_1, \dots, b_k\}$$

$$F_D(x_1, \dots, x_k) = \sum f_D(b_1, \dots, b_k) x_1^{b_1} \dots x_k^{b_k}.$$

Lemme

La fonction F_D est rationnelle. Son dénominateur est un produit de polynôme de la forme $1 - x^\alpha = 1 - x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k}$ avec $\alpha_i \in \{0, 1, 2\}$.

Stratégie de la preuve (étape 1)

Lemme

La fonction F_D est rationnelle. Son dénominateur est un produit de polynôme de la forme $1 - x^\alpha = 1 - x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k}$ avec $\alpha_i \in \{0, 1, 2\}$.

idée de preuve : Ingrédient principal : comptage de points entiers dans les polytopes (Khovanski-Pukhlikov, Lawrence, Barvinok). Si

$C = \mathbb{R}_+ u_1 + \dots + \mathbb{R}_+ u_k$ est un cône unimodulaire (i.e. $u_1, \dots, u_k$ base de $\mathbb{Z}^k$) alors la série génératrice des points entiers de C

$$F_C(x_1, \dots, x_k) := \sum_{\alpha \in C \cap \mathbb{Z}^k} x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k}$$

vérifie

$$F_C = \frac{1}{(1 - x^{u_1}) \cdots (1 - x^{u_k})}.$$



Stratégie de la preuve (étape 2)

Lemme

Soit D un diagramme de séparatrices. Soit $G_D(q)$ la série génératrice des surfaces à petits carreaux de diagramme D . Alors

$$G_D(q) = \sum_{h_1, \dots, h_k \geq 1} (\Delta F_D)(q^{h_1}, \dots, q^{h_k})$$

où $\Delta = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \dots x_k \frac{\partial}{\partial x_k}$.

Stratégie de la preuve (étape 2)

Lemme

Soit D un diagramme de séparatrices. Soit $G_D(q)$ la série génératrice des surfaces à petits carreaux de diagramme D . Alors

$$G_D(q) = \sum_{h_1, \dots, h_k \geq 1} (\Delta F_D)(q^{h_1}, \dots, q^{h_k})$$

où $\Delta = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \dots x_k \frac{\partial}{\partial x_k}$.

preuve : Il y a un paramètre de twist (Δ) et les paramètres de hauteurs ($h_1, \dots, h_k$) à prendre en compte. Noter que l'aire du i -ème cylindre est $b_i h_i$. □

Stratégie de la preuve (étape 3)

Rappel : pour un diagramme de séparatrices D on écrit la fonction génératrice des surfaces à petits carreaux de diagrammes D comme

$$G_D(q) = \sum_{h_1, \dots, h_k \geq 1} (\Delta F_D)(q^{h_1}, \dots, q^{h_k})$$

où $\Delta = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \dots x_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ et $F_D(x_1, \dots, x_k)$ est rationnelle.

Stratégie de la preuve (étape 3)

Rappel : pour un diagramme de séparatrices D on écrit la fonction génératrice des surfaces à petits carreaux de diagrammes D comme

$$G_D(q) = \sum_{h_1, \dots, h_k \geq 1} (\Delta F_D)(q^{h_1}, \dots, q^{h_k})$$

où $\Delta = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \dots x_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ et $F_D(x_1, \dots, x_k)$ est rationnelle. Pour passer à l'équivalent asymptotique cN^D des surfaces avec au plus N carreaux, il reste à montrer que

$$\frac{1}{d!} \lim_{q \rightarrow 1} (1 - q)^d G_D(q) = c.$$

Stratégie de la preuve (étape 3)

Rappel : pour un diagramme de séparatrices D on écrit la fonction génératrice des surfaces à petits carreaux de diagrammes D comme

$$G_D(q) = \sum_{h_1, \dots, h_k \geq 1} (\Delta F_D)(q^{h_1}, \dots, q^{h_k})$$

où $\Delta = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \dots x_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ et $F_D(x_1, \dots, x_k)$ est rationnelle. Pour passer à l'équivalent asymptotique cN^D des surfaces avec au plus N carreaux, il reste à montrer que

$$\frac{1}{d!} \lim_{q \rightarrow 1} (1 - q)^d G_D(q) = c.$$

Pour tout h fixé dans la somme définissant $G_D(q)$, c'est facile.

$$\lim_{q \rightarrow 1} (1 - q)^d \frac{p(q)}{(1 - q^{a_1}) \dots (1 - q^{a_d})} = \frac{p(1)}{a_1 \dots a_d}.$$

Stratégie de la preuve (étape 3)

Rappel : pour un diagramme de séparatrices D on écrit la fonction génératrice des surfaces à petits carreaux de diagrammes D comme

$$G_D(q) = \sum_{h_1, \dots, h_k \geq 1} (\Delta F_D)(q^{h_1}, \dots, q^{h_k})$$

où $\Delta = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \dots x_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ et $F_D(x_1, \dots, x_k)$ est rationnelle. Pour passer à l'équivalent asymptotique cN^D des surfaces avec au plus N carreaux, il reste à montrer que

$$\frac{1}{d!} \lim_{q \rightarrow 1} (1 - q)^d G_D(q) = c.$$

Pour tout h fixé dans la somme définissant $G_D(q)$, c'est facile.

$$\lim_{q \rightarrow 1} (1 - q)^d \frac{p(q)}{(1 - q^{a_1}) \dots (1 - q^{a_d})} = \frac{p(1)}{a_1 \dots a_d}.$$

Le point délicat est de montrer que les contributions se somment correctement !

Stratégie de la preuve (étape 3)

On voit bien apparaître les valeur zêta multiples généralisées : chaque terme

$$\frac{p(x)}{(1 - x^{u_1}) \dots (1 - x^{u_d})}$$

de $(\Delta F_D)(x_1, \dots, x_k)$ fait apparaître le résidu suivant de $G_D(q)$

$$\sum_{h_1, \dots, h_k \geq 1} \frac{p(1, \dots, 1)}{(u_1 \cdot h_1) \dots (u_d \cdot h_d)}.$$

Retour sur les résultats asymptotiques

Théorème (DGZZ)

L'asymptotique des surfaces à petits carreaux de genre g , diagramme D et au plus N carreaux est équivalent à cN^{6g-6} où c est une combinaison linéaire à coefficients rationnels de valeur zêta multiples généralisées.

Théorème (DGZZ)

L'asymptotique des surfaces à petits carreaux de genre g , multi-courbe γ et au plus N carreaux est équivalent à cN^{6g-6} où $c \in \pi^{6g-6}\mathbb{Q}$.

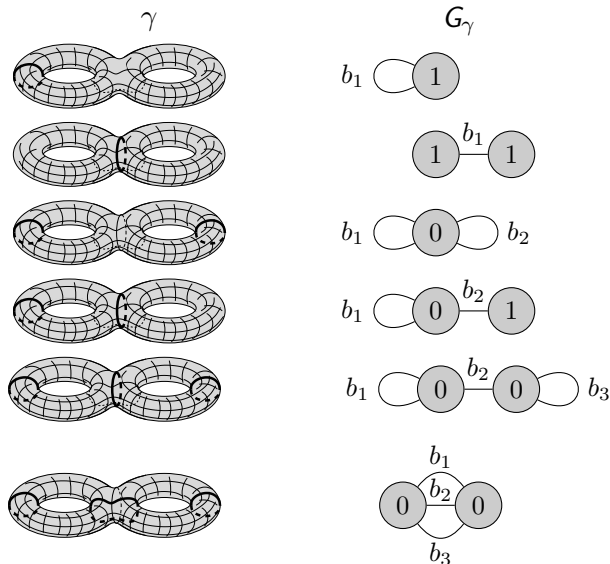
Pourquoi $\pi^{6g-6}\mathbb{Q}$?

Théorème (DGZZ)

Pour une multi-courbe fixée γ , le terme de plus haut degré de $f_\gamma(b_1, \dots, b_k) := \sum_D f_D(b_1, \dots, b_k)$ est polynomial et les degrés de chaque variable sont pairs. Par conséquent, la constante c de l'asymptotique cN^d est une combinaison linéaire de produits de $\zeta(2m) \in \mathbb{Q}[\pi^2]$.

Preuve de polynomialité de $f_\gamma(b_1, \dots, b_k)$

A une multi-courbe γ correspond une certaine décomposition de la surface



Preuve de polynomialité de $f_\gamma(b_1, \dots, b_k)$

Théorème

On a

$$f_\gamma(b_1, \dots, b_k) = \prod_{v \in G_\gamma}^k N_{g_v, n_v}(\mathbf{b}_v^2) + \text{termes de degrés inférieurs.}$$

où

- les polynômes $N_{g', n'}(b_1^2, \dots, b_{n'}^2)$ sont les polynômes de Kontsevich. (Ces polynômes comptent des cartes, cf prochain transparent.)
- $\mathbf{b}_v$ est la liste des variables adjacentes aux sommets v .

Polynômes de Kontsevich $N_{g,n}(b_1, \dots, b_n)$

Étant donnée une carte G trivalente, de genre g à n faces (numérotées) on lui associe la fonction de comptage $N_G(b_1, \dots, b_n)$ définie comme suit. Pour $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^n$ de somme paire on définit $N_G(b_1, \dots, b_n)$ comme le nombre de vecteurs $(\ell_e)_{e \in E(G)} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^{E(G)}$ de longueurs d'arêtes telles que les longueurs des faces sont $b_1, \dots, b_n$.

Polynômes de Kontsevich $N_{g,n}(b_1, \dots, b_n)$

Étant donnée une carte G trivalente, de genre g à n faces (numérotées) on lui associe la fonction de comptage $N_G(b_1, \dots, b_n)$ définie comme suit. Pour $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^n$ de somme paire on définit $N_G(b_1, \dots, b_n)$ comme le nombre de vecteurs $(\ell_e)_{e \in E(G)} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^{E(G)}$ de longueurs d'arêtes telles que les longueurs des faces sont $b_1, \dots, b_n$.

$$N_{g,n}(b_1^2, \dots, b_n^2) := \sum_{G \in \mathcal{R}_{g,n}} \frac{1}{|\text{Aut}(G)|} N_G(b_1, \dots, b_n) \\ + \text{termes d'ordre inférieur.}$$

Polynômes de Kontsevich $N_{g,n}(b_1, \dots, b_n)$

Étant donnée une carte G trivalente, de genre g à n faces (numérotées) on lui associe la fonction de comptage $N_G(b_1, \dots, b_n)$ définie comme suit. Pour $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^n$ de somme paire on définit $N_G(b_1, \dots, b_n)$ comme le nombre de vecteurs $(\ell_e)_{e \in E(G)} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^{E(G)}$ de longueurs d'arêtes telles que les longueurs des faces sont $b_1, \dots, b_n$.

$$N_{g,n}(b_1^2, \dots, b_n^2) := \sum_{G \in \mathcal{R}_{g,n}} \frac{1}{|\text{Aut}(G)|} N_G(b_1, \dots, b_n) \\ + \text{termes d'ordre inférieur.}$$

Théorème (Kontsevich)

$N_{g,n}$ est polynomiale.

Preuve de polynomialité de $f_\gamma(b_1, \dots, b_k)$

Exemples

$$N_{0,3}(b_1^2, b_2^2, b_3^2) = 1 \quad N_{1,1}(b_1^2) = \frac{1}{48}b_1^2 \quad N_{1,2}(b_1^2, b_2^2) = \frac{1}{384}(b_1^2 + b_2^2)^2$$

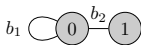
Preuve de polynomialité de $f_\gamma(b_1, \dots, b_k)$

Exemples

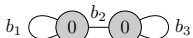
$$N_{0,3}(b_1^2, b_2^2, b_3^2) = 1 \quad N_{1,1}(b_1^2) = \frac{1}{48} b_1^2 \quad N_{1,2}(b_1^2, b_2^2) = \frac{1}{384} (b_1^2 + b_2^2)^2$$



$$f_\gamma(b_1) \sim N_{1,2}(b_1^2, b_1^2) = \frac{1}{96} b_1^4$$



$$f_\gamma(b_1, b_2) \sim N_{0,3}(b_1^2, b_1^2, b_2^2) N_{1,1}(b_2^2) = \frac{1}{48} b_2^2$$



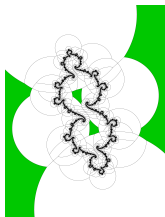
$$f_\gamma(b_1, b_2, b_3) \sim N_{0,3}(b_1^2, b_2^2, b_3^2)^2 = 1$$

Les mots de la fin

- L'apparition de la polynomialité dans $f_\gamma(b_1, \dots, b_k)$, γ multi-courbe, et pas $f_D(b_1, \dots, b_k)$, D diagramme de séparatrice, reste mystérieuse.
- En fait, on sait dire plus sur les séries génératrices : $G_\gamma(q)$ est quasi-modulaire (ce n'est pas le cas des $G_D(q)$).

(publicité)

école de Printemps
"Mathématiques Expérimentales 2018"



<https://mathexp2018.sciencesconf.org/>

- École (21-25 mai)
avec les cours de A. Busic, X. Goaoc, M. Rao, B. Salvy
- Atelier (28 mai - 1 juin)